CONCOURS PREMASTER EDHEC

SAMEDI 2 AVRIL 2022

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte 3 exercices

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu sous peine d'élimination, de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). La seule responsabilité du candidat est engagée dans le cas contraire. Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie.

Exercice 1

1) Dans cette question, et dans cette question seulement, u et v sont les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Vérifier que les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

2) Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
Montrer que $u\circ v$ et $v\circ u$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

3) Dans cette question, et dans cette question seulement, u et v sont les applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ par : $u(P):x\mapsto P'(x)$ et $v(P):x\mapsto \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
b) Étudier l'injectivité et la surjectivité de u et v.
c) Montrer que 0 est la seule valeur propre de u et que v n'a pas de valeur propre.
d) Déterminer $\mathrm{Ker}(u\circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v\circ u)$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

4) On revient au cas général et on souhaite montrer que la propriété évoquée à la question 2) reste valable pour $\lambda=0$ si E est de dimension finie n (avec $n\in\mathbb{N}^*$).
Pour ceci, on considère les matrices A et B de u et v dans une base donnée.

a) Rappeler la définition de l'inversibilité d'une matrice carrée.
b) Montrer que, si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.
c) En déduire que AB est inversible si, et seulement si, BA est inversible.
d) Conclure.

Exercice 2

On rappelle qu'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite 2π-périodique (ou de période 2π) si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+2\pi)=f(x)$$

Dans tout l'exercice, E désigne l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
On considère une fonction f de E et on pose :

$$c(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1) a) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que, pour tout réel $\alpha>1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\int_x^{x+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que les primitives de f sont 2π-périodiques si, et seulement si, $c(f)=0$.

3) Soit g la fonction définie par : $\forall t\in\mathbb{R}$, $g(t)=f(t)-c(f)$.

a) Vérifier que g appartient à E puis donner la valeur de $c(g)$.

b) Montrer, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel $\beta>0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{g(t)}{t^\beta}\mathrm{d}t$ converge.

c) Soit $\beta \in]0,1]$. On suppose $c(f) \neq 0$.

Pour tout x de $[1,+\infty[$, établir la relation $\int_1^x \frac{g(t)}{t^\beta}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(t)}{t^\beta}\mathrm{d}t - c(f)\int_1^x \frac{1}{t^\beta}\mathrm{d}t$, puis, en distinguant les cas $\beta \in]0,1[$ et $\beta = 1$, donner, en fonction de $c(f)$, un équivalent de $\int_1^x \frac{f(t)}{t^\beta}\mathrm{d}t$ lorsque x est au voisinage de $+\infty$.

4) On pose, dans cette question, $f(t) = |\sin t|$.

a) Montrer que f appartient à E puis calculer $c(f)$.

b) En déduire que : $\int_1^x \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln x$.

c) En déduire également que : $\int_1^x \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{\pi}\sqrt{x}$.

5) a) Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente (on pourra utiliser la question 3b)).

b) Déduire des questions précédentes que I n'est pas une intégrale absolument convergente.

Exercice 3

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On note F la fonction de répartition commune aux variables X_1, X_2, X_3, ...

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ et on admet que S_n est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) Soit F_n la fonction de répartition de S_n.

a) Justifier que l'on a l'égalité entre événements suivante : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(S_n \leq x) = \bigcap_{k=1}^{n}(X_k \leq x)$.

b) En déduire $F_n(x)$ pour tout réel x.

c) Montrer que S_n est une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction f_n définie ci-dessous par : $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

2) Montrer que S_n possède une espérance (on ne demande pas de la calculer).

3) a) Établir l'égalité : $E(S_n) = \int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^n\right)\mathrm{d}x$.

b) En déduire que l'espérance de S_n est donnée par : $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

4) Dans cette question, on se propose de déterminer une autre expression de $E(S_n)$ et pour ce faire, on admet le résultat suivant :

Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes de densités respectives f_X et f_Y nulles sur $\mathbb{R}_-^*$, l'une au moins de ces deux densités étant bornée, alors une densité de $X+Y$ est la fonction f_{X+Y}, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_{X+Y}(x) = \int_0^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}$, où les X_i sont toujours les variables aléatoires présentées au début de l'exercice. On admet que les variables aléatoires $\frac{X_i}{i}$ sont à densité et qu'il en est de même pour T_n.

a) Déterminer, à l'aide de F, la fonction de répartition G_{n+1} de la variable aléatoire $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ puis en donner une densité g_{n+1}, et vérifier que g_{n+1} est bornée.

b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, f_n est une densité de T_n.

c) Donner alors une nouvelle expression de l'espérance de S_n sous forme de somme puis en déduire la formule sommatoire suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

d) Montrer que S_n possède une variance et l'exprimer sous forme de somme.

5) Une dernière façon de calculer $E(S_n)$.

a) Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(t) - f_n(t) = \frac{-1}{n+1} f'_{n+1}(t)$.

b) Pour tout réel x positif, on pose $J_n(x) = \int_0^x t\, f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que

$$J_{n+1}(x) - J_n(x) = -\frac{1}{n+1} x\, f_{n+1}(x) + \frac{1}{n+1} \int_0^x f_{n+1}(t)\mathrm{d}t$$

c) En déduire l'égalité :

$$E(S_{n+1}) - E(S_n) = \frac{1}{n+1}$$

d) Retrouver finalement l'expression de $E(S_n)$ obtenue à la question 4).

6) Une nouvelle variable aléatoire.
Soit V une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln V$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont on note F_W la fonction de répartition. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

7) Une convergence en loi.
On pose $W_n = S_n - \ln n$ et on note F_{W_n} la fonction de répartition de W_n.

a) Établir l'égalité $F_{W_n}(x) = F_n(x + \ln n)$ pour tout réel x.

b) Soit x un réel fixé. Montrer que, pour n assez grand, on a $F_{W_n}(x) = \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n$.

c) En déduire que la suite (W_n) converge en loi vers W.

CONCOURS EDHEC

CONCOURS PRÉ MASTER

SAMEDI 2 AVRIL 2022

<u>ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES</u>

CORRIGÉ

Exercice 1

1) On trouve $AB=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ et $BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Avec le déterminant, on voit que les valeurs propres de AB**,** comme celles de BA, sont les racines de $x(x-2)=0$, ce qui montre que AB et BA ont les mêmes valeurs propres : 0 et 2.

2) Soit λ une valeur propre non nulle de $u\circ v$: il existe $x\neq 0$ tel que $(u\circ v)(x)=\lambda x$.

On en déduit : $(v\circ u)(v(x))=v((u\circ v)(x))=v(\lambda x)=\lambda v(x)$

Or $v(x)\neq 0$ sinon on aurait $u(v(x))=0$, soit $\lambda x=0$, ce qui est faux (car λ et x sont non nuls) donc $v(x)$ est vecteur propre de $v\circ u$, et ainsi, λ est valeur propre de $v\circ u$.

Conclusion : toute valeur propre non nulle de $u\circ v$ est aussi valeur propre de $v\circ u$.

On raisonne symétriquement, en échangeant u et v, pour montrer que toute valeur propre non nulle de $v\circ u$ est aussi valeur propre de $u\circ v$.

Bilan : $u\circ v$ et $v\circ u$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

3) a) Dérivée et primitives de polynômes sont des polynômes donc $u(P)$ et $v(P)$ appartiennent à $\mathbb{R}[X]$. De plus, u est linéaire par linéarité de la dérivation et v l'est par linéarité de l'intégration.

Ainsi, u et v sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.

3) b) • $P\in \text{Ker}(u)\Leftrightarrow u(P)=0\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ P'(x)=0\Leftrightarrow P\in\mathbb{R}_0[X]$ donc $\text{Ker}(u)=\mathbb{R}_0[X]$ et u n'est pas injectif. En revanche, u est surjectif puisque tout polynôme possède des primitives qui sont encore des polynômes.

• $P\in \text{Ker}(v)\Leftrightarrow v(P)=0\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t=0$.

En dérivant, on obtient : $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=0$, soit $P=0_{\mathbb{R}[X]}$.

Réciproquement, si P est le polynôme nul, il est bien dans $\text{Ker}(v)$.

Ainsi, on a $\text{Ker}(v)=\left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$ et v est injectif.

En revanche, v n'est pas surjectif puisque, par exemple, le polynôme constant égal à 1 n'a pas d'antécédent par v (en effet, pour tout polynôme P, on a $v(P)(0)=0\neq 1$).

3) c) • On a vu que 0 est valeur propre de u avec $\mathbb{R}_0[X]$ pour sous-espace propre associé. Soit $\lambda\neq 0$ et P un polynôme non nul. La relation $u(P)=\lambda P$ équivaut à $P'=\lambda P$ et l'égalité est impossible pour un problème de degré. Conclusion : 0 est la seule valeur propre de u.

• On a vu que 0 n'est pas valeur propre de v. Soit $\lambda\neq 0$ et P un polynôme non nul. La relation $v(P)=\lambda P$ équivaut à : $\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t=\lambda P(x)$. En dérivant, on aurait $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=\lambda P'(x)$, et l'égalité est impossible, encore une fois, pour un problème de degré (même si $\lambda=0$). Conclusion : v n'a pas de valeur propre.

3) d) On a : $(u\circ v)(P)=P$ et $(v\circ u)(P)=P-P(0)$.

On en déduit : Ker$(u\circ v)$=$\{0\}$ et Ker$(v\circ u)$ = $\mathbb{R}_0[X]$.

Par conséquent, la propriété vue à la deuxième question ne reste pas valable pour $\lambda=0$ en dimension quelconque.

4) a) On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice carrée M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible lorsqu'il existe une matrice N de même format telle que $MN = I_n$ ou $NM = I_n$.

4) b) Si AB est inversible, alors il existe une matrice carrée C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(AB)C = I$, ce qui s'écrit (par associativité) $A(BC) = I$ et prouve que A est inversible.
De même, si AB est inversible, alors il existe une matrice carrée D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D(AB) = I$, ce qui s'écrit (par associativité) $(DA)B = I$ et prouve que B est inversible.

4) c) On vient de montrer que, si AB est inversible, alors A et B le sont, ce qui implique que BA est inversible.
En échangeant les lettres A et B, la réciproque est immédiate et finalement, AB est inversible si, et seulement si, BA est inversible.

4) d) Grâce à la question 4c), on a la suite d'équivalences suivante :
$0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v) \Leftrightarrow AB$ non inversible $\Leftrightarrow BA$ non inversible $\Leftrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
Grâce à la question 2), ceci prouve, qu'en dimension finie, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 2
1) a) La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 2\pi]$ donc elle est bornée sur $[0, 2\pi]$, et par 2π-périodicité, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

1) b) D'après la question 1a), f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1, +\infty[$, et ainsi, il existe une constante M positive telle que, pour tout réel t supérieur ou égal à 1, on a $|f(t)| \leq M$. On en déduit $\left|\dfrac{f(t)}{t^\alpha}\right| \leq \dfrac{M}{t^\alpha}$.
Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{M}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ est convergente (proportionnelle à une intégrale de Riemann de paramètre $\alpha > 1$, alors, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives et continues, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

2) a) La fonction φ qui, à x associe $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus on a : $\varphi'(x) = f(x+2\pi) - f(x) = 0$ car f est 2π-périodique. Par conséquent, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0)$. Ceci donne exactement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) b) On a, d'après la question 2a) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où, en notant F une primitive de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x+2\pi) - F(x) = 2\pi c(f)$$

On en déduit facilement : $c(f) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, F(x+2\pi) = F(x)$.
On conclut que les primitives de f sont 2π-périodiques si, et seulement si, $c(f) = 0$.

3) a) La fonction g est bien continue (elle diffère de f d'une constante) et elle est 2π-périodique puisque : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t+2\pi) = f(t+2\pi) - c(f) = f(t) - c(f) = g(t)$.
Ainsi, g appartient à E.
De plus, on a : $c(g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(f(t)-c(f))\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(f)\,\mathrm{d}t = c(f) - c(f) = 0$.

3) b) On effectue une intégration par parties en posant $u'(t) = g(t)$ et $v(t) = \dfrac{1}{t^\beta}$, en choisissant pour u une primitive G de g, et avec $v'(t) = \dfrac{-\beta}{t^{\beta+1}}$, on obtient (les fonctions u et v étant bien de classe C^1 sur $[1,+\infty[$) : $\forall x \in [1,+\infty[,\ \displaystyle\int_1^x \frac{g(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t = \frac{G(x)}{x^\beta} - G(1) + \beta\int_1^x \frac{G(t)}{t^{\beta+1}}\,\mathrm{d}t$.
Comme $c(g) = 0$, G est 2π-périodique et comme G est continue sur $[1,+\infty[$ (elle est même de classe C^1), elle appartient à E. De plus, $\beta+1>1$ donc, d'après la question 1b), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{G(t)}{t^{\beta+1}}\,\mathrm{d}t$ converge et comme G est bornée (en tant qu'élément de E), on a aussi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x^\beta} = 0$ (car $\beta > 0$).
Ainsi, le membre de droite de l'égalité $\displaystyle\int_1^x \frac{g(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t = \frac{G(x)}{x^\beta} - G(1) + \beta\int_1^x \frac{G(t)}{t^{\beta+1}}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ donc le membre de gauche aussi, ce qui prouve que, pour tout réel $\beta > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge.

3) c) En scindant l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)-c(f)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ par linéarité, on obtient :

$$\int_1^x \frac{f(t)-c(f)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{c(f)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t - c(f)\int_1^x \frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$$

On a maintenant deux cas à étudier :

- Si $\beta \in]0,1[$, on en déduit :

$$\int_1^x \frac{g(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t + \frac{c(f)}{\beta-1}\left(\frac{1}{x^{\beta-1}} - 1\right) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t + \frac{c(f)}{\beta-1}\left(x^{1-\beta}-1\right).$$

On peut écrire alors : $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t = \frac{c(f)}{1-\beta}\left(x^{1-\beta}-1\right) + \int_1^x \frac{g(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$.

Comme $\beta \in]0,1[$ et $c(f) \neq 0$, alors $\dfrac{c(f)}{1-\beta}\left(x^{1-\beta}-1\right)$ possède une limite infinie quand x tend vers $+\infty$, et comme $\displaystyle\int_1^x \frac{g(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie quand x tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_1^x \frac{g(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ est négligeable devant $\dfrac{c(f)}{1-\beta}\left(x^{1-\beta}-1\right)$. On en déduit donc :

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{c(f)}{1-\beta}\left(x^{1-\beta}-1\right) \underset{+\infty}{\sim} c(f)\times\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}$$

- Si $\beta = 1$, on en déduit :

$$\int_1^x \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + c(f)\ln x$$

Ici aussi, $c(f)\ln x$ possède une limite infinie quand x tend vers $+\infty$, et $\int_1^x \frac{g(t)}{t}\mathrm{d}t$ possède une limite finie quand x tend vers $+\infty$, donc $\int_1^x \frac{g(t)}{t}\mathrm{d}t$ est négligeable devant $c(f)\ln x$. On en déduit donc :

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} c(f)\ln x$$

4) a) Avec $f(t)=|\sin t|$, la fonction *f* est continue car la fonction *f* et la fonction valeur absolue le sont et *f* est de plus 2π-périodique puisque la fonction sinus l'est. Par conséquent, f appartient à *E*.

On a $c(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}-\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}[-\cos t]_0^\pi+\frac{1}{2\pi}[\cos t]_\pi^{2\pi}$.

Ceci donne $c(f)=\frac{1}{2\pi}\times 2+\frac{1}{2\pi}\times 2$, et finalement :

$$c(f)=\frac{2}{\pi}$$

4) b) On peut appliquer l'équivalent trouvé à la question 3c) dans le cas $\beta=1$, ce qui donne :

$$\int_1^x \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln x$$

4) c) On peut appliquer l'équivalent trouvé à la question 3c) dans le cas $\beta=\frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\int_1^x \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{\pi}\sqrt{x}$$

5) a) La fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc il y a deux problèmes : 0 et $+\infty$.

- En 0, la fonction se prolonge par continuité car $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, ce qui règle ce problème et garantit la convergence de $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.
- En $+\infty$, avec les notations de la question 3) et en prenant pour *f* la fonction sinus, on a $c(f)=0$ donc, pour tout t de $[1,+\infty[$, on a : $g(t)=f(t)=\sin t$.

Avec le résultat de la question 3b), l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{g(t)}{t^\beta}\mathrm{d}t$ converge pour tout $\beta>0$ donc en particulier pour $\beta=1$, ce qui prouve que $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Grâce aux deux points précédents, on conclut que $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

5) b) D'après l'équivalent trouvé à la question 4b), on a $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=+\infty$ donc I n'est pas une intégrale absolument convergente.

Exercice 3

1) a) Pour tout réel x, on a $(S_n \leq x) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leq x)$: en effet, comme S_n prend la plus grande des valeurs prises par $X_1, ..., X_n$, dire que S_n prend une valeur inférieure ou égale à x, c'est dire que chacune des variables $X_1, ..., X_n$ prend une valeur inférieure ou égale à x.

1) b) Comme les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(S_n \leq x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x)$$

Les variables aléatoires X_k suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre 1, on sait que :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ P\left(X_k \leq x\right) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a donc finalement :

$$F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) c) F_n est continue, et même de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)^n$ est continue, et même de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et F_n est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ car c'est la fonction nulle sur cet intervalle.
En 0, on a $\lim_{x \to 0^+} F_n(x) = F_n(0) = 0$ et $\lim_{x \to 0^-} F_n(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$. Par conséquent F_n est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0, donc S_n est une variable aléatoire à densité.
En dérivant F_n, sauf en 0 bien sûr, on obtient :

$$F_n'(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a alors une densité f_n de S_n en posant $f_n(x) = F_n'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ et en posant, par exemple, $f_n(0) = 0$ on obtient :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2) On a $\int_{-\infty}^{0} x f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et, pour tout x positif, on a :

$$x f_n(x) = n x \mathrm{e}^{-x} (1 - \mathrm{e}^{-x})^{n-1}$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} (1 - \mathrm{e}^{-x})^{n-1} = 1$ (que ce soit pour $n = 1$ ou pour $n \geq 2$), on en déduit :

$$x f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} n x \mathrm{e}^{-x}$$

Comme l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente (c'est l'intégrale définissant l'espérance commune des X_k), le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives assure que l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} x f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi absolument convergente.

Conclusion : $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente donc S_n possède une espérance.

3) a) Grâce à une intégration par parties (licite car les fonctions u et v présentées plus loin sont bien de classe C^1 sur tout intervalle $[0,x]$), on a, en posant $u'(t)=f_n(t)$ et $v(t)=t$, avec $v'(t)=1$ et en choisissant $u(t)=F_n(t)-1$:

$$\int_0^x t\,f_n(t)\,\mathrm{d}t = x(F_n(x)-1)-\int_0^x (F_n(t)-1)\,\mathrm{d}t = x(F_n(x)-1)+\int_0^x (1-F_n(t))\,\mathrm{d}t$$

Comme la première intégrale a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ (puisque S_n a une espérance) et comme $x(F_n(x)-1)=x\left(\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^n-1\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-nx\mathrm{e}^{-x}$, on a, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x(F_n(x)-1)=0$ donc on peut passer à la limite dans l'égalité précédente et on obtient, en remplaçant $F_n(t)$ par son expression explicite :

$$E(S_n)=\int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^n\right)\mathrm{d}x$$

3) b) Avec la formule du binôme, on a : $1-\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^n=1-\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,\mathrm{e}^{-kx}=-\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,\mathrm{e}^{-kx}$.

Par linéarité de l'intégration, on obtient, pour tout A positif :

$$\int_0^A\left(1-\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^n\right)\mathrm{d}x=-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^A \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\left[\frac{-1}{k}\mathrm{e}^{-kx}\right]_0^A=-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k}\left(\mathrm{e}^{-kA}-1\right).$$

On a donc : $\int_0^A\left(1-\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^n\right)\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(-1)^k}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-kA}\right)$.

En faisant tendre A vers $+\infty$, on trouve bien :

$$E(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

4) a) On a, pour tout réel x : $G_{n+1}(x)=P\left(\dfrac{X_{n+1}}{n+1}\le x\right)=P\left(X_{n+1}\le(n+1)x\right)=F\left((n+1)x\right)$.

On obtient donc :

$$G_{n+1}(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(n+1)x} & \text{si } x\ge 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$

On trouve une densité g_{n+1} de $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ en dérivant sauf en 0 où l'on pose $g_{n+1}(0)=(n+1)^2$, ce qui donne :

$$g_{n+1}(x)=\begin{cases}(n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x} & \text{si } x\ge 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{-(n+1)x}$ est bornée par 0 et 1 donc $g_{n+1}(x)\in\left[0,(n+1)\right]$, et ainsi g_{n+1} est bornée.

4) b)
- Pour $n=1$, on a $T_1=X_1$ donc f_1 est bien une densité de T_1.
- Soit un entier n supérieur ou égal à 1 pour lequel f_n est une densité de T_n.

De même que X_{n+1}, la variable $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est indépendante de $X_1,X_2,\ldots,X_n$ donc $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est indépendante de T_n (lemme des coalitions), et comme $T_{n+1}=T_n+\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$, on obtient une densité $f_{T_{n+1}}$ de T_{n+1} avec la formule admise par l'énoncé : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f_{T_{n+1}}(x)=\int_0^{+\infty} f_n(t)\,g_{n+1}(x-t)\,\mathrm{d}t$.

La quantité $f_n(t)g_{n+1}(x-t)$ n'est différente de 0 que si $0 \le t \le x$ donc il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{T_{n+1}}(x) = \int_0^x f_n(t)\, g_{n+1}(x-t)\,\mathrm{d}t$$

On remplace et on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{T_{n+1}}(x) = (n+1)\int_0^x n\,\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1}\mathrm{e}^{-(n+1)(x-t)}\mathrm{d}t = n(n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}\int_0^x \mathrm{e}^{nt}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1}\mathrm{d}t$$

On arrange un peu en écrivant $\mathrm{e}^{nt}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^t\left(\mathrm{e}^t\right)^{n-1}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^t\left(\mathrm{e}^t-1\right)^{n-1}$ et on peut finir le calcul :

$$f_{T_{n+1}}(x) = n(n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}\int_0^x \mathrm{e}^t\left(\mathrm{e}^t-1\right)^{n-1}\mathrm{d}t = n(n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}\left[\frac{\left(\mathrm{e}^t-1\right)^n}{n}\right]_0^x = (n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(\mathrm{e}^x-1\right)^n$$

Il faut encore arranger un peu en écrivant $\mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(\mathrm{e}^x-1\right)^n = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^n\left(\mathrm{e}^x-1\right)^n = \mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^n$ et on trouve bien ce qu'il fallait trouver : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{T_{n+1}}(x) = (n+1)\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^n = f_{n+1}(x)$.

L'égalité $f_{T_{n+1}}(x) = f_{n+1}(x)$ étant vraie aussi sur $\mathbb{R}_-^*$ (car les deux fonctions sont nulles puisque T_{n+1} et S_{n+1} sont à valeurs positives), on a l'égalité $f_{T_{n+1}}(x) = f_{n+1}(x)$ pour tout réel x.

- On a bien montré par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, f_n est une densité de T_n.

4) c) Comme S_n suit la même loi que T_n son espérance est celle de T_n et, par linéarité de l'espérance, on obtient : $E(S_n) = E(T_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}E(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.

En égalant les expressions de $E(S_n)$ trouvées aux questions 3) et 4), on obtient la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

4) d) Comme les variables X_i sont mutuellement indépendantes, les variables $\frac{X_i}{i}$ le sont aussi et comme elles ont une variance, T_n possède aussi une variance et on a :

$$V(S_n) = V(T_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}V(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$$

5) a) Pour tout t positif, on a d'une part :

$f_{n+1}(t) - f_n(t) = (n+1)\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^n - n\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1}$.

$f_{n+1}(t) - f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1}\left((n+1)\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)-n\right)$.

$f_{n+1}(t) - f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1}\left(1-(n+1)\mathrm{e}^{-t}\right)$.

On a d'autre part :

$f'_{n+1}(t) = -(n+1)\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^n + n(n+1)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1}$.

$f'_{n+1}(t) = (n+1)\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1}\left(-\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)+n\mathrm{e}^{-t}\right)$.

$f'_{n+1}(t) = (n+1)\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1}\left((n+1)\mathrm{e}^{-t}-1\right)$, d'où : $-\frac{f'_{n+1}(t)}{n+1} = \mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1}\left(1-(n+1)\mathrm{e}^{-t}\right)$.

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(t) - f_n(t) = -\frac{1}{n+1}f'_{n+1}(t)$

5) b) En multipliant par t les deux membres de cette égalité, on obtient :

$$t\left(f_{n+1}(t)-f_n(t)\right)=-\frac{1}{n+1}t\,f_{n+1}'(t)$$

En intégrant cette nouvelle égalité sur $[0, x]$, les fonctions en jeu étant bien continues, on trouve (par linéarité de l'intégration pour le membre de gauche) :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J_{n+1}(x)-J_n(x)=-\frac{1}{n+1}\int_0^x t\,f_{n+1}'(t)dt$$

En posant $v(t)=t$ et $u'(t)=f_{n+1}'(t)$, on a $v'(t)=1$ et on prend $u(t)=f_{n+1}(t)$. Comme les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,x]$, on peut intégrer par parties, ce qui donne :

$$J_{n+1}(x)-J_n(x)=-\frac{1}{n+1}[t\,f_{n+1}(t)]_0^x+\frac{1}{n+1}\int_0^x f_{n+1}(t)dt$$

En calculant le crochet, on trouve :

$$J_{n+1}(x)-J_n(x)=-\frac{1}{n+1}x\,f_{n+1}(x)+\frac{1}{n+1}\int_0^x f_{n+1}(t)dt \qquad (*)$$

5) c) Il reste à passer à la limite.

- On a vu à la question **2)** que $x f_{n+1}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}(n+1)x\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^n\underset{x\to+\infty}{\sim}(n+1)x\mathrm{e}^{-x}$ donc, par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x f_{n+1}(x)=0$.
- De plus, comme S_n possède une espérance, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}J_{n+1}(x)=E(S_{n+1})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}J_n(x)=E(S_n)$.
- Pour finir, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f_{n+1}(t)dt=\int_0^{+\infty}f_{n+1}(t)dt=1$

Après passage à la limite dans l'égalité (*), on obtient : $E(S_{n+1})-E(S_n)=\dfrac{1}{n+1}$.

5) d) On peut procéder par récurrence :

- Pour $n=1$, on a $S_1=X_1$ donc $E(S_1)=E(X_1)=1=\sum\limits_{k=1}^{1}\frac{1}{k}$, ce qui initialise la proposition.
- Si l'on suppose que, pour un certain entier naturel n non nul, on a $E(S_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, alors, d'après la question **5b)**, on a $E(S_{n+1})=E(S_n)+\dfrac{1}{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\dfrac{1}{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$, ce qui prouve l'hérédité de la proposition.

On conclut :

$$E(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

6) Tout d'abord, on peut remarquer que, comme $V(\Omega)=\mathbb{R}_+^*$, on a $W(\Omega)=\mathbb{R}$.

On a alors : $\forall x\in\mathbb{R},\ F_W(x)=P(W\le x)=P(-\ln V\le x)=P(\ln V\ge -x)$. Comme la fonction exponentielle est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$P(\ln V\ge -x)=P(V\ge \mathrm{e}^{-x})$$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R},\ F_W(x)=P(V\ge\mathrm{e}^{-x})\underset{\downarrow}{\overset{V\text{ est à densité}}{=}}P(V>\mathrm{e}^{-x})=1-F_V(\mathrm{e}^{-x})$.

Comme $\mathrm{e}^{-x}>0$, on trouve en remplaçant : $\forall x\in\mathbb{R},\ F_W(x)=1-\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

7) a) Pour tout réel x, on a :

$$F_{W_n}(x) = P(W_n \le x) = P(S_n - \ln n \le x) = P(S_n \le x + \ln n)$$

Conclusion :

$$F_{W_n}(x) = F_n(x + \ln n)$$

b) Comme $F_{W_n}(x) = F_n(x+\ln n)$ et comme $F_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ (1-\mathrm{e}^{-y})^n & \text{si } y \ge 0 \end{cases}$, il suffit de remplacer y par $x + \ln n$, les conditions sur y devenant $x + \ln n < 0$ et $x + \ln n \ge 0$, c'est-à-dire $x < -\ln n$ et $x \ge -\ln n$.

On a donc : $F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln n \\ (1-\mathrm{e}^{-x-\ln n})^n & \text{si } x \ge -\ln n \end{cases}$.

Comme $\mathrm{e}^{-x-\ln n} = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\ln n} = \mathrm{e}^{-x}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln n}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$, on peut simplifier, ce qui donne :

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln n \\ \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \ge -\ln n \end{cases}$$

Pour un réel x fixé, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln n = -\infty$, alors, pour tout entier naturel n assez grand ($n > \mathrm{e}^{-x}$), on a $x \ge -\ln n$, ce qui justifie de prendre :

$$F_{W_n}(x) = \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n$$

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n} = 0$, on peut utiliser l'équivalent classique $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, ce qui implique (pour n assez grand afin que $1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n} > 0$) : $\ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$.

En multipliant par n, on obtient :

$$n\ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\mathrm{e}^{-x}$$

Comme deux équivalents ont même limite, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$

On peut écrire $F_{W_n}(x) = \exp\left(n\ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right)$. Comme d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$ et comme, d'autre part, la fonction exponentielle est continue en $-\mathrm{e}^{-x}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_{W_n}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} = F_W(x)$$

On vient bien de montrer que (W_n) converge en loi vers W.

EDHEC BUSINESS SCHOOL

CONCOURS PRÉ MASTER

RAPPORT DE CORRECTION 2022 :

Épreuve de MATHÉMATIQUES

Présentation de l'épreuve.
L'épreuve, longue comme d'habitude, comportait trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté et très sélectif tout en respectant scrupuleusement le programme.

• L'exercice 1, portant sur le programme d'algèbre linéaire, proposait de montrer que, si u et v sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E, alors $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres non nulles et ont les mêmes valeurs propres si E est de dimension finie.

• L'exercice 2, portant sur le programme d'analyse avait pour objectif d'établir les équivalents suivants :

$$\int_1^x \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln x \text{ et } \int_1^x \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{\pi}\sqrt{x}$$

La dernière question proposait de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet, le premier équivalent cité plus haut servant à montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.

• L'exercice 3, portant sur le programme de probabilité, présentait une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On étudiait ensuite la variable $S_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ dont on calculait l'espérance de trois façons distinctes. La fin proposait d'établir la convergence en loi de la variable $W_n = S_n - \ln n$ vers une variable suivant une loi de Weibull.

Statistiques.
Pour les 292 candidats ayant composé :
• La moyenne obtenue à cette épreuve est de 10,74 sur 20, très légèrement supérieure à celle de l'année dernière (plus 0,13 point).
• L'écart-type d'environ 4,94 (sensiblement le même que l'année dernière).
• La médiane est, quant à elle, égale à 10 (0,3 point au-dessous de celle de l'année dernière).
• 8,2 % des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4, le pourcentage était de 9,7 l'année dernière.
• 29,1 % des candidats ont entre 8 et 12 (0,9 point de plus que l'année dernière)
• 11,3 % des candidats obtiennent une note supérieure ou égale à 18 (0,8 point de plus que l'année dernière).

Analyse des copies.
Les correcteurs constatent une nette détérioration de la présentation des copies, ce qui ne pousse pas à l'indulgence, mais surtout une baisse nette de la rigueur : les résultats sont souvent affirmés, soit sans preuve, soit avec une argumentation bâclée.

Certains candidats ignorent même le programme officiel de mathématiques du concours Prémaster de l'EDHEC (rappelons que les notions de déterminant, polynôme caractéristique, polynôme minimal, ne sont pas au programme et que les réponses utilisant ces notions n'ont, pour certaines, pas été validées). D'un point de vue académique, les correcteurs notent que le niveau est aussi hétérogène que l'année dernière : d'un côté, quelques très brillants candidats, ayant des connaissances bien en phase avec celles exigées par le programme, produisent des copies intéressantes, et de l'autre, un certain nombre de candidats très mal préparés obtiennent des notes extrêmement basses. Cela dit, les correcteurs trouvent l'ensemble d'un niveau honorable (ceci, grâce aux très bons candidats bien sûr, mais aussi à un bon nombre de candidats sérieux qui font bien ce qu'ils savent faire). Ils regrettent cependant que de très nombreux candidats, certainement par manque de temps pour préparer cette épreuve, aient fait l'impasse sur les probabilités.

Commentaires par exercice.

Exercice 1

• Parfois le calcul du produit de deux matrices de taille 2×2 est incorrect !
• L'utilisation du polynôme caractéristique a fait perdre de nombreux points à un nombre non négligeable de candidats.
• Confusion entre la définition de l'inversibilité d'une matrice carrée et ses caractérisations.
• Beaucoup pensent qu'un espace vectoriel est toujours de dimension finie et que toute considération sur un endomorphisme peut se ramener à du calcul matriciel.
• Rappelons qu'une application linéaire n'est pas forcément un endomorphisme.
• Quelques candidats confondent injectivité et surjectivité.
• Une phrase telle que « l'intégrale d'un polynôme reste un polynôme » a laissé pantois les membres du jury (il s'agissait d'une primitive d'un polynôme).
• Il semble que les candidats ne sachant pas répondre à certaines questions (comme la question 4b)) laissent entendre que c'est du cours : c'est pratique mais pas très honnête !

Exercice 2

• Une grosse confusion a été faite sur la nature de $c(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ au moment de montrer que la fonction g définie par $g(t)=f(t)-c(f)$ est périodique : de nombreux candidats ont écrit : $g(t+2\pi)=f(t+2\pi)-c(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+2\pi)\,\mathrm{d}t$!
• Le critère de comparaison par majoration porte sur les fonctions intégrées et pas sur les intégrales, contrairement à ce que pensent certains candidats.
• Il faut rédiger les intégrations par parties et ne pas se contenter d'écrire « après intégration par parties, on trouve etc » sans même vérifier qu'on a le droit de faire cette intégration par parties.
• Le calcul de $c(f)$ pour la fonction *f* définie par $f(t)=|\sin t|$ a souvent été catastrophique, certains allant jusqu'à donner une primitive de *f* sans considérer le signe de $\sin t$ selon que *t* soit dans $[0,\pi]$ ou $[\pi,2\pi]$.

Exercice 3

• On a lu beaucoup de produits d'événements, ce qui prouve que les mots n'ont pas toujours le sens qu'ils devraient avoir.
• Pour la question 1a), une phrase contenant la locution « Si… alors… » n'a aucune chance de prouver une égalité d'événements, mais seulement une inclusion.
• La définition d'une variable à densité n'est connue que d'une petite poignée de candidats.
• Dans la série des affirmations sans preuve, voici un modèle lu très souvent :

$$\text{« } n x \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On ne peut pas accorder un quelconque crédit à ce genre d'affirmation, quand bien même elle est vraie !

• L'idée de faire une récurrence ou une sommation télescopique pour déterminer $E(S_n)$ ayant la relation $E(S_{n+1})-E(S_n)=\dfrac{1}{n+1}$ n'a pas effleuré grand-monde…

• Ayant établi l'équivalent $n\ln\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\mathrm{e}^{-x}$, il n'est pas question de composer par la fonction exponentielle : c'est interdit pour la simple raison que souvent le résultat obtenu est faux.

• Avec la relation $f_n(t)=nt\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-t})^{n-1}$, pour t positif, beaucoup se perdent dans les calculs pour établir :

$$f_{n+1}(t)-f_n(t)=\frac{-1}{n+1}f'_{n+1}(t)$$

Conclusion.

L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point du programme : les trois "compartiments" de ce programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités) sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.

Ajoutons, pour cette année, que démontrer ne consiste pas à asséner une affirmation, même si c'est fait avec une énorme confiance, comme si tout allait toujours bien dans le monde mathématique ! Une preuve se doit, certes, d'être simple, mais elle doit être argumentée et honnête.