CONCOURS EDHEC

CONCOURS PRÉ MASTER

Samedi 23 mars 2024

ÉPREUVE D'ÉCONOMIE

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte 4 parties.

Consignes

Essayez de répondre de manière aussi précise et concise que possible aux questions. Evitez les longues digressions. Chaque résultat final, à encadrer soigneusement, doit être accompagné d'une phrase d'explication.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie

PARTIE 1 :

Le producteur Verpont, qui a fait des études d'économie dans son jeune temps, estime sa fonction de production par l'équation suivante :

$$Q(K,L) = 6K^{2/3}L^{1/2}$$

où K et L représentent respectivement les quantités de facteurs mobilisées pour la production. Les prix unitaires des facteurs sont p_K et p_L, respectivement.

1.1. Calculez les élasticités de production, puis déduisez le taux marginal de substitution technique (TMST).

1.2. Pour sa production, le producteur Verpont dispose d'un budget B_0. Déterminez l'équation du sentier d'expansion et les fonctions de demande de Verpont en facteurs de production.

1.3. Grâce aux résultats précédents, déduisez la valeur du TMST aux points où Verpont maximise sa production.

1.4. Calculez l'élasticité de substitution, puis interprétez le résultat.

1.5. Admettons désormais que Verpont puisse imposer une baisse du prix du facteur L face à son fournisseur (selon son pouvoir de négociation par exemple) à mesure que les quantités achetées augmentent. La fonction suivante décrit la relation entre le prix et la quantité achetée : $p_L = -0{,}5L + 9$. Déterminez l'équation de la contrainte budgétaire pour un budget B_1 et pour $p_K = 3$.

PARTIE 2 :

Michel est retraité depuis peu et dispose d'un petit revenu mensuel, que l'on note R. Michel consacre exclusivement son revenu à l'achat des deux biens X et Y, en quantités respectives x et y, dont les prix unitaires respectifs sont p_X et p_Y. La fonction d'utilité de Michel est la suivante : $U(x,y) = xy - 2$.

2.1. Donnez l'équation des courbes d'indifférence pour un niveau d'utilité donné U_0, puis l'expression de la droite de budget de Michel pour un revenu donné R_0.

2.2. Après avoir exposé les conditions de premier ordre à l'aide du lagrangien, déterminez l'équation du sentier d'expansion du revenu.

2.3. Déduisez les coordonnées x^* et y^* des points optimaux.

2.4. Avec $p_X = 6$€, $p_Y = 3$€ et $R = 24$€, calculez :

- les coordonnées de l'optimum (noté Z) ;
- l'équation du sentier d'expansion ;

- l'équation de la droite de budget (notée D_1) ;
- l'équation de la courbe d'indifférence associée à l'optimum (notée U_1).

2.5. Représentez graphiquement les éléments de la question précédente (avec x en abscisses).

2.6. A l'optimum Z, calculez le taux marginal de substitution de Michel par trois méthodes différentes.

2.7. Le prix du bien Y passe désormais à $p_Y = 4€$ (avec p_X et R inchangés, soit $p_X = 6€$ et $R = 24€$). Déterminez la nouvelle droite de budget de Michel ainsi que le nouveau sentier d'expansion du revenu.

2.8. D'après les résultats obtenus à la question précédente, mettez en évidence les effets de substitution et de revenu, ainsi que l'effet total, de cette augmentation du prix du bien Y.

2.9. Déterminez l'équation de la courbe d'Engel pour le bien X, puis calculez l'élasticité-revenu.

2.10. Déterminez l'équation de la fonction de demande individuelle de Michel pour le bien Y.

<u>PARTIE 3</u> :

L'entreprise Kauscoët est en situation de monopole sur le marché des vestes imperméables haut de gamme. La demande est caractérisée par la fonction suivante :

$$q = 50 - \frac{1}{2}p$$

où p et q désignent respectivement le prix unitaire en euros et la quantité demandée.
Le coût total de production de l'entreprise Kauscoët est décrit par la fonction suivante :

$$CT(q) = q^2 + 10q$$

3.1. Déterminez les fonctions de coût moyen, de coût marginal, de recette moyenne, de recette marginale et de profit unitaire. Peut-on qualifier l'entreprise Kauscoët de « monopole naturel » ? Justifiez précisément votre réponse.

3.2. Afin de maximiser son profit, quelle quantité l'entreprise Kauscoët doit-elle produire ? Quel sera le prix de vente fixé ? Enfin, calculez le profit total ainsi réalisé.

3.3. Calculez le surplus total associé à l'équilibre précédent.

3.4. Quelle stratégie l'entreprise Kauscoët devrait-elle mettre en œuvre pour que le surplus total soit maximum (vous déterminerez le nouvel équilibre correspondant) ? Calculez ce surplus total maximisé.

3.5. Le Ministre de l'Economie et des Finances décide de réglementer ce marché en fixant un prix de vente maximal de 30€. Quel est l'impact de cette réglementation sur la stratégie de tarification de l'entreprise Kauscoët ? Quel est le profit ainsi réalisé ?

PARTIE 4 :

L'entreprise familiale Boonshi, implantée dans le Nord de la France, produit des petites figurines décoratives de manière artisanale depuis près de 60 ans. L'entreprise utilise un petit atelier de production pour fabriquer deux types de figurines : une série en bronze (bien X) et une série en poudre de marbre (bien Y), respectivement en quantités x et y. Pour cette production, l'entreprise a besoin d'utiliser trois facteurs de production : du capital (en quantité K), du travail (en quantité L) et de l'énergie (en quantité G).
Le directeur de la fabrication estime que la fonction de production peut être approximée comme suit :

$$[x + y]^{1/2} = K^{1/2} + 2L^{1/2} + G^{1/2}$$

On note les prix unitaires des facteurs de production K, L et G de la façon suivante, respectivement : p_K, p_L et p_G. Enfin, on note B le budget dont dispose l'entreprise.

4.1. Afin que l'entreprise Boonshi maximise sa production, déterminez les quantités de facteurs K, L et G à utiliser.

4.2. Déduisez les quantités optimales de facteurs avec $p_K = 4$; $p_L = 32$; $p_G = 8$; $B = 2560$.

4.3. Déterminez les quantités de facteurs K, L et G qui permettraient à l'entreprise Boonshi de minimiser son coût de production pour un volume donné de biens X et Y.

4.4. Lorsque la production globale de biens X et Y est fixée à 1280, quelles sont les quantités optimales de facteurs (vous utiliserez les prix de facteurs indiqués à la question 4.2.) ? Qu'en concluez-vous ?

CONCOURS EDHEC

CONCOURS PRÉ MASTER

Samedi 23 mars 2024

ÉPREUVE D'ÉCONOMIE

CORRIGÉ

PARTIE 1 :

Le producteur Verpont, qui a fait des études d'économie dans son jeune temps, estime sa fonction de production par l'équation suivante :

$$Q(K,L) = 6K^{2/3}L^{1/2}$$

où K et L représentent respectivement les quantités de facteurs mobilisées pour la production. Les prix unitaires des facteurs sont p_K et p_L, respectivement.

1.1. Calculez les élasticités de production, puis déduisez le taux marginal de substitution technique (TMST).

$$\varepsilon_{Q/K} = \frac{\partial Q/Q}{\partial K/K} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \left(\frac{2}{3}6K^{-1/3}L^{1/2}\right)\frac{K}{6K^{2/3}L^{1/2}} = \frac{4K^{2/3}L^{1/2}}{6K^{2/3}L^{1/2}} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

$$\varepsilon_{Q/L} = \frac{\partial Q/Q}{\partial L/L} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \left(\frac{1}{2}6K^{2/3}L^{-1/2}\right)\frac{L}{6K^{2/3}L^{1/2}} = \frac{3K^{2/3}L^{1/2}}{6K^{2/3}L^{1/2}} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$TMST_{K,L} = \frac{\partial Q/K}{\partial Q/L} = \frac{\frac{2}{3}6K^{-1/3}L^{1/2}}{\frac{1}{2}6K^{2/3}L^{-1/2}} = \boldsymbol{\frac{4L}{3K}}$$

1.2. Pour sa production, le producteur Verpont dispose d'un budget B_0. Déterminez l'équation du sentier d'expansion et les fonctions de demande de Verpont en facteurs de production.

Le problème d'optimisation du producteur Verpont est le suivant :

Maximiser $Q(K,L) = 6K^{2/3}L^{1/2}$
sous contrainte $p_K K + p_L L = B_0$

Soit Φ le Lagrangien du problème :

$$\Phi = 6K^{2/3}L^{1/2} - \lambda(p_K K + p_L L - B_0)$$

Les conditions de premier ordre sont :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial K} = 4K^{-1/3}L^{1/2} - \lambda p_K = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial L} = 3K^{2/3}L^{-1/2} - \lambda p_L = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = p_K K + p_L L - B_0 = 0$$

D'où

$$4K^{-1/3}L^{1/2} = \lambda p_K$$
$$3K^{2/3}L^{-1/2} = \lambda p_L$$
$$p_K K + p_L L = B_0$$

⇔

$$\frac{4L}{3K} = \frac{\lambda p_K}{\lambda p_L}$$

Soit l'équation du sentier d'expansion :

$$\boldsymbol{K = \frac{4}{3}\frac{p_L}{p_K}L}$$

⇔

$$p_K \frac{4}{3}\frac{p_L}{p_K}L + p_L L = B_0$$

⇔

$$L^* = \frac{3}{7}\frac{B_0}{p_L}$$

Et

$$K = \frac{4}{3}\frac{p_L}{p_K}\frac{3}{7}\frac{B_0}{p_L}$$

⇔

$$K^* = \frac{4}{7}\frac{B_0}{p_K}$$

Les fonctions de demande en facteurs de production K et L sont donc :

$$\boldsymbol{K^* = \frac{4}{7}\frac{B_0}{p_K}} \quad et \quad \boldsymbol{L^* = \frac{3}{7}\frac{B_0}{p_L}}$$

1.3. Grâce aux résultats précédents, déduisez la valeur du TMST aux points où Verpont maximise sa production.

On sait que

$$TMST_{K,L} = \frac{4L}{3K}$$

D'où

$$TMST_{K,L} = \frac{4L}{3\frac{4}{3}\frac{p_L}{p_K}L} = \boldsymbol{\frac{p_K}{p_L}}$$

1.4. Calculez l'élasticité de substitution, puis interprétez le résultat.

$$\varepsilon_s = \frac{\partial(L/K)/(L/K)}{\partial TMST_{K,L}/TMST_{K,L}} = \frac{\partial(L/K)}{\partial TMST_{K,L}}\frac{TMST_{K,L}}{L/K} = \frac{3}{4}\frac{4L/3K}{L/K} = \mathbf{1}$$

On en conclut qu'une variation de 1% du rapport des prix des facteurs entraîne une variation de 1% du rapport entre les dotations de facteurs.

1.5. Admettons désormais que Verpont puisse imposer une baisse du prix du facteur L face à son fournisseur (selon son pouvoir de négociation par exemple) à mesure que les quantités achetées augmentent. La fonction suivante décrit la relation entre le prix et la quantité achetée : $p_L = -0{,}5L + 9$. Déterminez l'équation de la contrainte budgétaire pour un budget B_1 et pour $p_K = 3$.

La contrainte de budget s'écrit ainsi :

$$3K + (-0{,}5L + 9)L = B_1$$

⇔

$$3K = 0{,}5L^2 - 9L + B_1$$

D'où

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{6}L^2 - 3L + \frac{B_1}{3}}$$

PARTIE 2 :

Michel est retraité depuis peu et dispose d'un petit revenu mensuel, que l'on note R. Michel consacre exclusivement son revenu à l'achat des deux biens X et Y, en quantités respectives x et y, dont les prix unitaires respectifs sont p_X et p_Y. La fonction d'utilité de Michel est la suivante : $U(x, y) = xy - 2$.

2.1. Donnez l'équation des courbes d'indifférence pour un niveau d'utilité donné U_0, puis l'expression de la droite de budget de Michel pour un revenu donné R_0.

Equation des courbes d'indifférence :

$$y = \frac{U_0 + 2}{x}$$

Expression de la droite de budget :

$$p_X x + p_Y y = R$$

⇔

$$y = \frac{R_0}{p_Y} - \frac{p_X}{p_Y}x$$

2.2. Après avoir exposé les conditions de premier ordre à l'aide du lagrangien, déterminez l'équation du sentier d'expansion du revenu.

Le problème d'optimisation est le suivant :

Maximiser $U(x, y) = xy - 2$
sous contrainte $p_X x + p_Y y = R$

Soit Φ le Lagrangien du problème :

$$\Phi = xy - 2 - \lambda(p_X x + p_Y y - R)$$

Les conditions de premier ordre sont :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y - \lambda p_X = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x - \lambda p_Y = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = R - p_X x - p_Y y = 0$$

Soit

$$\boldsymbol{y = \frac{p_X}{p_Y} x}$$

2.3. Déduisez les coordonnées x^* et y^* des points optimaux.

$$\boldsymbol{x^* = \frac{R}{2p_X}} \quad et \quad \boldsymbol{y^* = \frac{R}{2p_Y}}$$

2.4. Avec $p_X = 6€$, $p_Y = 3€$ et $R = 24€$, calculez :

- les coordonnées de l'optimum (noté Z)

$$\boldsymbol{x^*} = \frac{24}{2 \times 6} = \mathbf{2} \quad et \quad \boldsymbol{y^*} = \frac{24}{2 \times 3} = \mathbf{4}$$

- l'équation du sentier d'expansion

$$\boldsymbol{y = 2x}$$

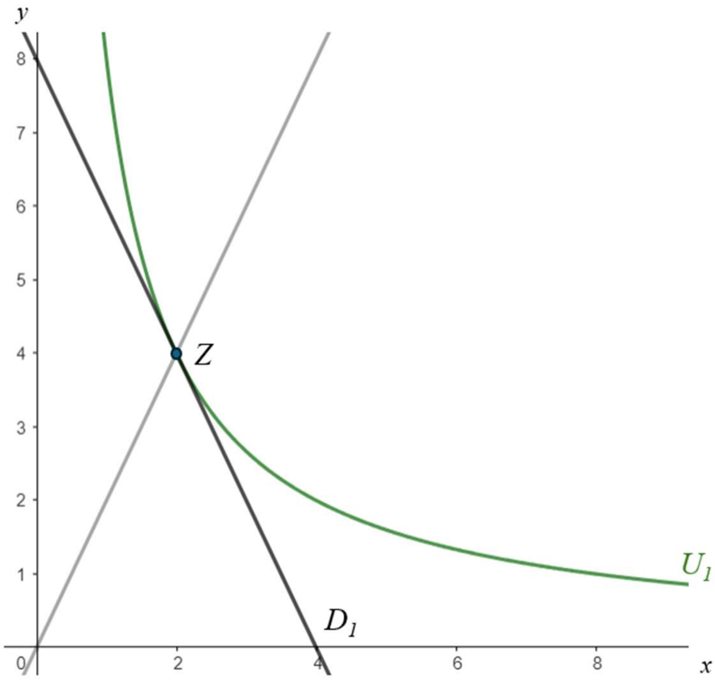
- l'équation de la droite de budget (notée D_1)

$$y = \frac{24}{3} - \frac{6}{3} x \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{y = 8 - 2x}$$

- l'équation de la courbe d'indifférence associée à l'optimum (notée U_1).

$$y = \frac{2 \times 4 - 2 + 2}{x} \quad \text{soit} \quad y = \frac{8}{x}$$

2.5. Représentez graphiquement les éléments de la question précédente (avec x en abscisses).



2.6. A l'optimum Z, calculez le taux marginal de substitution de Michel par trois méthodes différentes.

$$(1)\ \ TMS = \frac{U'_X}{U'_Y} = \frac{y}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

$$(2)\ \ TMS = \frac{p_X}{p_Y} = \frac{6}{3} = 2$$

$$(3)\ \ TMS = -\frac{dy}{dx} = -\left(-\frac{U_0 + 2}{x^2}\right) = \frac{8}{4} = 2$$

2.7. Le prix du bien Y passe désormais à $p_Y = 4$€ (avec p_X et R inchangés, soit $p_X = 6$€ et $R = 24$€). Déterminez la nouvelle droite de budget de Michel ainsi que le nouveau sentier d'expansion du revenu.

$$y = \frac{R_0}{p_Y} - \frac{p_X}{p_Y}x$$

⇔

$$y = \frac{24}{4} - \frac{6}{4}x \ \ \text{soit}\ \ \boldsymbol{y = 6 - 1,5x}$$

Et

$$y = \frac{6}{4}x \ \ \text{soit}\ \ \boldsymbol{y = 1,5x}$$

2.8. D'après les résultats obtenus à la question précédente, mettez en évidence les effets de substitution et de revenu, ainsi que l'effet total, de cette augmentation du prix du bien Y.

Situation optimale initiale : $x^* = 2$ et $y^* = 4$
Intersection entre le nouveau sentier d'expansion et la nouvelle droite de budget, soit :

$$\begin{cases} y = 6 - 1{,}5x \\ y = 1{,}5x \end{cases}$$

D'où la situation optimale finale : $x = 2$ et $y = 3$

Situation intermédiaire :
Intersection entre le nouveau sentier d'expansion et la courbe d'indifférence U_1, soit :

$$\begin{cases} y = 1{,}5x \\ y = \dfrac{8}{x} \end{cases}$$

Soit

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2{,}31 \quad \text{et} \quad y = 2\sqrt{3} = 3{,}46$$

- Bien X :
  - Effet de substitution = +0,31
  - Effet de revenu = -0,31
  - Effet total = 0
- Bien Y :
  - Effet de substitution = -0,54
  - Effet de revenu = -0,46
  - Effet total = -1

2.9. Déterminez l'équation de la courbe d'Engel pour le bien X, puis calculez l'élasticité-revenu.

$$\text{Avec } x^* = \frac{R}{2p_X} \quad \text{on obtient} \quad Q_X = \frac{1}{12}R$$

Avec Q_X désignant la quantité consommée du bien X.

$$\varepsilon_{Q/R} = \frac{\partial Q/Q}{\partial R/R} = \frac{\partial Q}{\partial R}\frac{R}{Q} = \frac{1}{12} \times \frac{R}{\frac{1}{12}R} = \mathbf{1}$$

2.10. Déterminez l'équation de la fonction de demande individuelle de Michel pour le bien Y.

$$\text{Avec } y^* = \frac{R}{2p_Y} \quad \text{et} \quad R = 24, \quad \text{on obtient} \quad \boldsymbol{Q_Y = \frac{12}{p_Y}}$$

<u>PARTIE 3</u> :

L'entreprise Kauscoët est en situation de monopole sur le marché des vestes imperméables haut de gamme. La demande est caractérisée par la fonction suivante :

$$q = 50 - \frac{1}{2}p$$

où p et q désignent respectivement le prix unitaire en euros et la quantité demandée.
Le coût total de production de l'entreprise Kauscoët est décrit par la fonction suivante :

$$CT(q) = q^2 + 10q$$

3.1. Déterminez les fonctions de coût moyen, de coût marginal, de recette moyenne, de recette marginale et de profit unitaire. Peut-on qualifier l'entreprise Kauscoët de « monopole naturel » ? Justifiez précisément votre réponse.

Soit la fonction de demande inverse :

$$p = 100 - 2q$$

- $CM(q) = q + 10$
- $Cm(q) = 2q + 10$
- $RM(q) = 100 - 2q$
- $Rm(q) = 100 - 4q$
- Profit unitaire $\pi = 100 - 2q - q - 10 = 90 - 3q$

L'entreprise Kauscoët n'est pas un monopole naturel car sa fonction de coût moyen n'est pas décroissante.

3.2. Afin de maximiser son profit, quelle quantité l'entreprise Kauscoët doit-elle produire ? Quel sera le prix de vente fixé ? Enfin, calculez le profit total ainsi réalisé.

q^* est telle que $Rm(q^*) = Cm(q^*)$, soit $100 - 4q = 2q + 10$ d'où $q^* = \mathbf{15}$

Et

$$p^* = 100 - 2 \times 15 = \mathbf{70}$$

D'où le profit total :

$$(90 - 3q) \times q = 45 \times 15 = \mathbf{675}$$

3.3. Calculez le surplus total associé à l'équilibre précédent.

$$\boldsymbol{ST} = \frac{(100 - 40) \times 15}{2} + \frac{(40 - 10) \times 15}{2} + (70 - 40) \times 15 = \mathbf{900}$$

3.4. Quelle stratégie l'entreprise Kauscoët devrait-elle mettre en œuvre pour que le surplus total soit maximum (vous déterminerez le nouvel équilibre correspondant) ? Calculez ce surplus total maximisé.

L'entreprise Kauscoët devrait produire une quantité économiquement efficace q_{CPP} (solution concurrentielle) telle que
$p(q_{CPP}) = Cm(q_{CPP})$, soit $100 - 2q = 2q + 10$ d'où $q_{CPP} = \mathbf{22,5}$

Et

$$p_{CPP} = 100 - 2 \times 22{,}5 = \mathbf{55}$$

D'où

$$ST_{max} = \frac{(100 - 10) \times 22{,}5}{2} = \mathbf{1012,5}$$

3.5. Le Ministre de l'Economie et des Finances décide de réglementer ce marché en fixant un prix de vente maximal de 30€. Quel est l'impact de cette réglementation sur la stratégie de tarification de l'entreprise Kauscoët ? Quel est le profit ainsi réalisé ?

q^* est telle que $p_{max} = Cm(q^*)$, soit $30 = 2q + 10$ d'où $q^* = \mathbf{10}$

D'où le profit total :

$$30 \times 10 - (10 + 10) \times 10 = \mathbf{100}$$

PARTIE 4 :

L'entreprise familiale Boonshi, implantée dans le Nord de la France, produit des petites figurines décoratives de manière artisanale depuis près de 60 ans. L'entreprise utilise un petit atelier de production pour fabriquer deux types de figurines : une série en bronze (bien X) et une série en poudre de marbre (bien Y), respectivement en quantités x et y. Pour cette production, l'entreprise a besoin d'utiliser trois facteurs de production : du capital (en quantité K), du travail (en quantité L) et de l'énergie (en quantité G).
Le directeur de la fabrication estime que la fonction de production peut être approximée comme suit :

$$[x + y]^{1/2} = K^{1/2} + 2L^{1/2} + G^{1/2}$$

On note les prix unitaires des facteurs de production K, L et G de la façon suivante, respectivement : p_K, p_L et p_G. Enfin, on note B le budget dont dispose l'entreprise.

4.1. Afin que l'entreprise Boonshi maximise sa production, déterminez les quantités de facteurs K, L et G à utiliser.

Le problème d'optimisation de l'entreprise Boonshi est le suivant :

$$\text{Maximiser } [x + y]^{1/2} = K^{1/2} + 2L^{1/2} + G^{1/2}$$
$$\text{sous contrainte } p_K K + p_L L + p_G G = B$$

Soit Φ le Lagrangien du problème :

$$\Phi = K^{1/2} + 2L^{1/2} + G^{1/2} - \lambda(p_K K + p_L L + p_G G - B)$$

Les conditions de premier ordre sont :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial K} = \frac{1}{2}K^{-1/2} - \lambda p_K = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial L} = L^{-1/2} - \lambda p_L = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial G} = \frac{1}{2}G^{-1/2} - \lambda p_G = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = B - p_K K - p_L L - p_G G = 0$$

D'où

$$\frac{1}{2}K^{-1/2} = \lambda p_K$$
$$L^{-1/2} = \lambda p_L$$
$$\frac{1}{2}G^{-1/2} = \lambda p_G$$
$$p_K K + p_L L + p_G G = B$$

⇔

$$\frac{\frac{1}{2}K^{-1/2}}{L^{-1/2}} = \frac{\lambda p_K}{\lambda p_L}$$

⇔

$$K = \left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K}\right)^2 L$$

et

$$\frac{\frac{1}{2}G^{-1/2}}{L^{-1/2}} = \frac{\lambda p_G}{\lambda p_L}$$

⇔

$$G = \left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2 L$$

D'où

$$p_K\left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K}\right)^2 L + p_L L + p_G\left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2 L = B$$

⇔

$$\frac{1}{4}\frac{{p_L}^2}{p_K}L + p_L L + \frac{1}{4}\frac{{p_L}^2}{p_G}L = B$$

Soit

$$\boldsymbol{L^* = \frac{B}{p_L\left(\frac{p_L}{4p_K} + \frac{p_L}{4p_G} + 1\right)}}$$

On obtient alors

$$K^* = \left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K}\right)^2 \frac{B}{p_L\left(\frac{p_L}{4p_K} + \frac{p_L}{4p_G} + 1\right)} = \frac{1}{4}\frac{{p_L}^2}{{p_K}^2}\frac{B}{\left(\frac{{p_L}^2}{4p_K} + \frac{{p_L}^2}{4p_G} + p_L\right)}$$

⇔

$$K^* = \frac{B{p_L}^2}{\left(p_K {p_L}^2 + \frac{{p_K}^2{p_L}^2}{p_G} + 4{p_K}^2 p_L\right)} = \frac{Bp_L}{\left(p_K p_L + \frac{{p_K}^2 p_L}{p_G} + 4{p_K}^2\right)}$$

⇔

$$\boldsymbol{K^* = \frac{Bp_L}{p_K\left(p_L + \frac{p_K p_L}{p_G} + 4p_K\right)}}$$

et

$$G^* = \left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2 \frac{B}{p_L\left(\frac{p_L}{4p_K} + \frac{p_L}{4p_G} + 1\right)} = \frac{1}{4}\frac{{p_L}^2}{{p_G}^2}\frac{B}{\left(\frac{{p_L}^2}{4p_K} + \frac{{p_L}^2}{4p_G} + p_L\right)}$$

⇔

$$G^* = \frac{Bp_L{}^2}{\left(\frac{p_G{}^2 p_L{}^2}{p_K} + p_G p_L{}^2 + 4p_G{}^2 p_L\right)} = \frac{Bp_L}{\left(\frac{p_G{}^2 p_L}{p_K} + p_G p_L + 4p_G{}^2\right)}$$

⇔

$$\boldsymbol{G^* = \frac{Bp_L}{p_G\left(\frac{p_G p_L}{p_K} + p_L + 4p_G\right)}}$$

4.2. Déduisez les quantités optimales de facteurs avec $p_K = 4$; $p_L = 32$; $p_G = 8$; $B = 2560$.

On obtient les résultats numériques suivants :

$$L^* = \frac{B}{p_L\left(\frac{p_L}{4p_K} + \frac{p_L}{4p_G} + 1\right)} \quad \text{soit} \quad L^* = \frac{2560}{32\left(\frac{32}{4 \times 4} + \frac{32}{4 \times 8} + 1\right)} \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{L^* = 20}$$

$$K^* = \frac{Bp_L}{p_K\left(p_L + \frac{p_K p_L}{p_G} + 4p_K\right)} \quad \text{soit} \quad K^* = \frac{2560 \times 32}{4\left(32 + \frac{4 \times 32}{8} + 4 \times 4\right)} \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{K^* = 320}$$

$$G^* = \frac{Bp_L}{p_G\left(\frac{p_G p_L}{p_K} + p_L + 4p_G\right)} \quad \text{soit} \quad G^* = \frac{2560 \times 32}{8\left(\frac{8 \times 32}{4} + 32 + 4 \times 8\right)} \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{G^* = 80}$$

4.3. Déterminez les quantités de facteurs K, L et G qui permettraient à l'entreprise Boonshi de minimiser son coût de production pour un volume donné de biens X et Y.

Le problème d'optimisation de l'entreprise Boonshi est le suivant :

Minimiser $p_K K + p_L L + p_G G$
sous contrainte $[x + y]^{1/2} = K^{1/2} + 2L^{1/2} + G^{1/2}$

Soit Φ le Lagrangien du problème :

$$\Phi = p_K K + p_L L + p_G G - \lambda(K^{1/2} + 2L^{1/2} + G^{1/2} - [x + y]^{1/2})$$

Les conditions de premier ordre sont :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial K} = p_K - \frac{1}{2}\lambda K^{-1/2} = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial L} = p_L - \lambda L^{-1/2} = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial G} = p_G - \frac{1}{2}\lambda G^{-1/2} = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = [x + y]^{1/2} - K^{\frac{1}{2}} - 2L^{\frac{1}{2}} - G^{1/2} = 0$$

D'où

$$\frac{1}{2}K^{-1/2} = \frac{p_K}{\lambda}$$
$$L^{-1/2} = \frac{p_L}{\lambda}$$
$$\frac{1}{2}G^{-1/2} = \frac{p_G}{\lambda}$$
$$K^{\frac{1}{2}} + 2L^{\frac{1}{2}} + G^{1/2} = [x+y]^{1/2}$$

⇔

$$\frac{\frac{1}{2}K^{-1/2}}{L^{-1/2}} = \frac{\lambda p_K}{\lambda p_L}$$

⇔

$$K = \left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K}\right)^2 L$$

et

$$\frac{\frac{1}{2}G^{-1/2}}{L^{-1/2}} = \frac{\lambda p_G}{\lambda p_L}$$

⇔

$$G = \left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2 L$$

D'où

$$\left[\left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K}\right)^2 L\right]^{\frac{1}{2}} + 2L^{\frac{1}{2}} + \left[\left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2 L\right]^{1/2} = [x+y]^{1/2}$$

⇔

$$\left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K} + 2 + \frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)L^{\frac{1}{2}} = [x+y]^{1/2}$$

⇔

$$\boldsymbol{L^* = \frac{x+y}{\left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K} + 2 + \frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2}}$$

D'où

$$\boldsymbol{K^* = \left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K}\right)^2 \frac{x+y}{\left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K} + 2 + \frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2}}$$

Et

$$\boldsymbol{G^* = \left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2 \frac{x+y}{\left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K} + 2 + \frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2}}$$

4.4. Lorsque la production globale de biens X et Y est fixée à 1280, quelles sont les quantités optimales de facteurs (vous utiliserez les prix de facteurs indiqués à la question 4.2.) ? Qu'en concluez-vous ?

Avec $\boldsymbol{x+y} = 1280$; $\boldsymbol{p_K = 4}$; $\boldsymbol{p_L = 32}$; $\boldsymbol{p_G = 8}$, on obtient les résultats numériques suivants :

$$L^* = \frac{x+y}{\left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K} + 2 + \frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2} \quad \text{soit} \quad L^* = \frac{1280}{\left(\frac{1}{2}\times\frac{32}{4} + 2 + \frac{1}{2}\times\frac{32}{8}\right)^2} \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{L^* = 20}$$

D’où

$$K^* = \left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K}\right)^2 \frac{x+y}{\left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K} + 2 + \frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2} \quad \text{soit} \quad K^* = \left(\frac{1}{2}\times\frac{32}{4}\right)^2 \times 20 \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{K^* = 320}$$

Et

$$G^* = \left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2 \frac{x+y}{\left(\frac{1}{2}\frac{p_L}{p_K} + 2 + \frac{1}{2}\frac{p_L}{p_G}\right)^2} \quad \text{soit} \quad G^* = \left(\frac{1}{2}\times\frac{32}{8}\right)^2 \times 20 \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{G^* = 80}$$

On observe que minimiser le coût pour une production (maximale) donnée revient à maximiser la production pour un coût donné : on obtient ainsi des quantités optimales de facteurs identiques.

CONCOURS PRÉ MASTER

RAPPORT DE CORRECTION 2024 :

Épreuve d'ÉCONOMIE

Présentation de l'épreuve :

L'épreuve comportait quatre parties permettant de juger les candidats sur une majorité des notions fondamentales au programme de l'épreuve.

La partie 1 portait sur l'analyse du comportement d'un producteur. Elle permettait d'évaluer la capacité des candidats à analyser le processus de production d'un bien, modélisé par une fonction de production Cobb-Douglas, en déterminant notamment la demande du producteur en facteurs de production.

La partie 2 portait sur l'analyse du comportement d'un consommateur. Elle permettait d'évaluer la capacité des candidats à caractériser un choix optimal sous contrainte avec une fonction d'utilité, à poser les conditions du programme d'optimisation, à identifier les effets de revenu et de substitution, puis de déterminer l'expression d'une fonction de demande individuelle.

La partie 3 s'intéressait à la capacité des candidats à analyser le comportement optimal d'une entreprise en situation de monopole en étudiant d'abord les fonctions de coût de production, puis à mettre en évidence l'effet d'une réglementation sur ce marché.

Enfin, la partie 4 interrogeait les candidats sur leur capacité à analyser le comportement optimal d'un producteur mobilisant trois facteurs de production dans son processus, en termes d'allocation factorielle optimale, de minimisation de son coût et de maximisation de l'*output*.

Statistiques :

Pour les 207 candidats ayant composé :

- La moyenne obtenue à cette épreuve est de 12,48 sur 20 ;
- L'écart-type est égal à 3,33 ;
- La médiane est égale à 13 ;
- Le 1er décile est égal à 9 ;
- Le 1er quartile est égal à 10,5 ;
- Le 3ème quartile est égal à 14,5 ;
- Le 9ème décile est égal à 16,5.

Commentaires synthétiques et remarques de correction :

En moyenne, les résultats de l'épreuve de cette session 2024 sont plus satisfaisants que ceux obtenus lors des sessions antérieures. Par ailleurs, les résultats sont globalement légèrement moins hétérogènes.

Pour la majorité des candidats, la partie 1 a été bien comprise. Sur les éléments de compréhension microéconomique pure, l'analyse du comportement optimal du producteur semble acquise : les conditions du programme d'optimisation ont été convenablement posées et développées, et le raisonnement calculatoire correctement mené. Ensuite, la détermination des fonctions de demande en facteurs de production n'a présenté aucune difficulté notable.
Néanmoins, on nuancera le propos en observant que bon nombre de candidats ont peiné à simplifier le calcul des élasticités de production et ainsi donner les résultats numériques. La même remarque est valable au sujet de l'élasticité de substitution.

La partie 2 relative à l'analyse du comportement optimal du consommateur a été relativement bien exécutée. Toutefois, un nombre non négligeable de candidats semble confondre valeur numérique à l'optimum et équation mathématique (cf. question 2.4). Ensuite, la majorité des candidats n'est capable de présenter le taux marginal de substitution (TMS) que par deux méthodes sur les trois attendues : le calcul du TMS à l'optimum à partir de la courbe d'indifférence est à revoir.
Enfin, les questions de cette partie 2 ayant posé le plus de difficultés aux candidats semblent être les trois dernières questions (questions 2.8, 2.9 et 2.10). Nombreux sont ceux n'ayant pas su présenter les effets de revenu et de substitution, l'équation de la courbe d'Engel, la valeur numérique de l'élasticité-revenu et la fonction de demande individuelle du consommateur (à l'instar de la session 2023 précédente).

La partie 3 a globalement été maîtrisée, notamment en ce qui concerne la mise en évidence des fonctions de coût et de la maximisation du profit de l'entreprise en situation de monopole. Cependant, une large majorité de candidats a étonnamment confondu profit total et profit unitaire. Sur ce type de questions rudimentaires, il est primordial que les candidats fassent preuve de plus de rigueur et d'attention lors de la lecture des énoncés.
Enfin, les deux dernières questions (questions 3.4 et 3.5) n'ont pas été de totales réussites : les calculs de surplus ont été souvent mal réalisés et les candidats, en large majorité, ont eu des difficultés à mettre en évidence la stratégie du monopole suite au plafonnement du prix par l'Etat. Les réponses apportées ont notamment révélé leur incapacité à interpréter de manière concrète et pratique la portée de leurs résultats et ainsi à prendre du recul sur la solution à proposer au problème posé.

Enfin, la quatrième et dernière partie est celle pour laquelle peu d'étudiants ont su obtenir les points. Cette partie semble avoir présenté des difficultés du fait que le processus de production de l'entreprise étudiée nécessitait l'emploi de trois facteurs de production, au lieu de deux généralement. Cette spécificité demande *de facto* plus de temps d'un point de vue calculatoire, mais ne complexifie aucunement le fond du problème et du programme d'optimisation à résoudre. Par ailleurs, pour les candidats ayant résolu ce programme, il est indispensable de fournir les expressions mathématiques sous forme réduite et simplifiée.

Conseils aux candidats :

Bien que les résultats de cette année soient globalement satisfaisants, il est conseillé aux candidats de prendre de la hauteur et du recul sur la portée des résultats obtenus, à l'instar des sessions antérieures. Il s'agit d'un point important car cela permet au correcteur de sanctionner la bonne compréhension par le candidat de la solution apportée à un problème d'un point de vue économique.
De plus, certains calculs de base (division et multiplication) ont été à la source d'erreurs flagrantes de résultats numériques, incompréhensibles à ce niveau… Bien que l'épreuve soit à dominante quantitative, il est également indispensable de faire preuve d'une rigueur totale dans l'orthographe : des fautes plus que grossières sont encore trop souvent observables, et ce pour une large majorité des candidats !
A nouveau, il est primordial de faire un effort de simplification des calculs et de réduction des expressions mathématiques de manière à rendre leur compréhension la plus facile possible. Il est également important d'être rigoureux, précis et soigné sur la présentation des résultats, tant numériques que littéraux, afin que le correcteur puisse s'assurer de la totale acquisition des éléments exposés.
Enfin, une bonne gestion du temps est indispensable pour ce type d'épreuves. Une appréciation globale du sujet et de la longueur des différentes parties devrait permettre une meilleure allocation des ressources investies par les candidats.