ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Vendredi 7 mai 2010 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On considère la fonction f définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1) Montrer que, pour tout couple (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :

$$f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \text{ et } f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

2) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

3) Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.

4) Déterminer les dérivées partielles secondes de f et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

5) a) Comparer les réels $(x+y)^2$ et $4xy$.
b) En déduire que f admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.

6) Soit g la fonction définie pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln(x) - \ln(y).$$

Montrer que : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $g(x, y) \geq 2\ln(2)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+\frac{1}{2^k}) = (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})\dots(1+\frac{1}{2^n})$.

1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
   b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
3) a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
4) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.
5) On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
   a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})$.
   b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\ln(\frac{\ell}{u_n}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})$.
   c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 \leq \ln(\frac{\ell}{u_n}) \leq \frac{1}{2^n}$.
   d) Déduire de la question précédente que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1 - e^{-\frac{1}{2^n}})$.
   e) Justifier que, pour tout réel x, on a : $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.

Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$.

1) a) Vérifier que f est une fonction paire.
   b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

2) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
3) On pose $Y = \ln(|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.
   a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x)$.
   b) Montrer, sans expliciter la fonction F_Y, que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y et vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

4) a) Montrer que, si x est positif, alors $1-e^{-x}$ appartient à $[0, 1[$ et montrer que, si x est strictement négatif, alors $1-e^{-x}$ est strictement négatif.

b) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1 - U)$ et reconnaître la loi de Z.

c) Simulation informatique de la loi de Y. On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction random permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1[$. Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y.

```
Function expo : real ;
   Begin
   expo : = ------ ;
   End ;
```

Problème

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes:

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \text{ et } f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 .$$

Partie 1 : étude de *f*.

1) a) Écrire la matrice M de f dans $\mathcal{B}$.

b) Déterminer la dimension de $\operatorname{Im} f$ puis celle de $\operatorname{Ker} f$.

c) Donner alors une base de $\operatorname{Ker} f$, puis en déduire une valeur propre de f ainsi que le sous-espace propre associé.

d) Déterminer les autres valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

e) En déduire que f est diagonalisable.

2) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.

b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.

c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a : $M^j = PD^j P^{-1}$.

d) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k\in\mathbb{N}^*$) :

Soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k + 1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.

Soit X_k a pris une valeur j, différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1) Reconnaître la loi de X_1.

2) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.
On rappelle que random(n) renvoie un entier compris entre 0 et $n-1$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable aléatoire X_k, l'entier naturel k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
Program simul ;
Var i, k, X, tirage : integer ;
Begin
Randomize ;
Readln(k) ; X : = random(3) + 1 ;
For i : = 2 to k do     begin
                        tirage : = random(3) + 1 ;
                        If X = 1 then  X : = ------
                                Else  If  tirage < > X    then  X : = ------ ;
                        end ;
Writeln (X) :
end.
```

3) On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $P(X_k = i)$.

a) Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

b) On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements. Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $U_{k+1} = AU_k$.

c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors , pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^k U_0$.

4) a) Vérifier que $A = M + \frac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

b) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right),\ P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

c) Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

5) a) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.

b) Écrire une fonction Pascal, notée esp, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de esp(k).

Option ES

Corrigé EDHEC 2010

Exercice 1 ....

1) Pour tout couple (x, y) de $]\,0, +\infty[\times]\,0, +\infty[$, on a :

$f(x, y) = 1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} + 1 = 2 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.

D'autre part : $f(x, y) = (x + y)\,\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{(x+y)^2}{xy}$.

2) d'après ce qui précède, la fonction f est une fraction rationnelle bien définie sur U (x et y sont différents de 0) par conséquent, f est de classe C^2 sur U.

3) On peut, en développant, écrire $f(x, y) = 2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

Pour tout (x, y) de $]\,0, +\infty[\times]\,0, +\infty[$, on a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} = \frac{y^2 - x^2}{x y^2}.$$

Les points critiques de f sont les couples (x, y) qui annulent simultanément ces deux dérivées premières. Les points critiques de f sont donc les solutions de $x^2 = y^2$, ce qui équivaut à $x = y$ ou $x = -y$. Comme x et y sont tous les deux strictement positifs, il reste : $x = y$.

Les points critiques de f sont les couples (x, x), avec $x > 0$

4) Les dérivées partielles secondes de f sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y}{x^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x}{y^3}.$$

En un point critique quelconque (x, x), on obtient, en utilisant les notations de Monge : $r = \dfrac{2}{x^2}$, $s = -\dfrac{2}{x^2}$ et $t = \dfrac{2}{x^2}$.

On a alors :

$$\boxed{rt - s^2 = 0}$$

Il n'est pas possible de conclure à l'existence d'extrema locaux de f.

5) a) $(x+y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$.
On a donc :

$$\boxed{(x+y)^2 \geq 4xy}$$

b) On a $f(x, y) = \dfrac{(x+y)^2}{x\,y}$.

Comme $(x+y)^2 \geq 4xy$, en divisant par $x\,y > 0$, on obtient : $f(x, y) \geq 4$. De plus l'égalité $f(x, x) = 4$ prouve que :

$$\boxed{f \text{ admet sur }]\,0, +\infty\,[^2 \text{ un minimum global égal à 4 en tous les couples } (x, x)}$$

6) La fonction g est bien définie sur $]\,0, +\infty\,[^2$, et on a successivement :
$\forall (x, y) \in\,]\,0, +\infty\,[^2$, $g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln(x) - \ln(y)$.

$g(x, y) = \ln(x + y)^2 - \ln(x\,y) = \ln \dfrac{(x+y)^2}{x\,y} = \ln(f(x, y))$.

Comme, pour tout couple (x, y) de $]\,0, +\infty\,[^2$, on a $f(x, y) \geq 4$, on en déduit, par croissance de la fonction logarithme népérien sur $]\,0, +\infty\,[$, que $\ln(f(x, y)) \geq \ln(4)$.
Pour finir :

$$\boxed{\forall (x, y) \in\,]\,0, +\infty\,[^2,\ g(x, y) \geq 2\ln(2)}$$

Exercice 2 ....

1) $u_0 = \displaystyle\prod_{k=0}^{0} (1 + \frac{1}{2^k}) = 1 + 1 = 2$.

$u_1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{1} (1 + \frac{1}{2^k}) = (1 + 1)(1 + \frac{1}{2}) = 3$.

$u_2 = \displaystyle\prod_{k=0}^{2} (1 + \frac{1}{2^k}) = (1 + 1)(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4}) = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$.

2) a) On sait que $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est le produit de facteurs tous plus grands que 1, dont le premier vaut 2.
Pour conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2}$$

Remarque : on pouvait aussi établir ce résultat par récurrence.

b) Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n+1} (1 + \frac{1}{2^k})$.

En mettant de côté le facteur correspondant à $k = n+1$, on obtient :

$u_{n+1} = (1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}) \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1 + \frac{1}{2^k}) = (1 + \frac{1}{2^{n+1}})\,u_n$.

On en déduit que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\,u_n$. Comme $\dfrac{1}{2^{n+1}} > 0$ et comme $u_n \geq 2 > 0$, on a :

$u_{n+1} - u_n > 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

3) a) On pose, pour tout réel x strictement supérieur à -1, $g(x) = \ln(1+x) - x$.
La fonction g est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a :

$g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.

On a donc : $g'(x) > 0$ sur $]-1, 0[$ et $g'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$.
La fonction g admet donc un maximum global en 0 et ce maximum vaut $g(0) = 0$.
Ceci prouve que , pour tout x supérieur strictement à -1, on a : $g(x) \leq 0$.
On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leq x}$$

b) Comme $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+\frac{1}{2^k}) > 0$, on a : $\ln u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ln(1+\frac{1}{2^k})$.

D'après la question précédente, $\ln(1+\dfrac{1}{2^k}) \leq \dfrac{1}{2^k}$, d'où : $\ln u_n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$.

Comme $\dfrac{1}{2} \neq 1$, on a : $\ln u_n \leq \dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$.

On en conclut alors que : $\ln u_n \leq 2(\ 1-(\dfrac{1}{2})^{n+1}\ )$, ce qui démontre, en majorant encore un peu que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ln u_n \leq 2}$$

4) Par croissance de la fonction exponentielle, on a : $u_n \leq e^2$. Ceci prouve que la suite (u_n) est majorée. Comme de plus, elle est croissante, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

Comme $2 \leq u_n \leq e^2$, on a, après passage à la limite : $2 \leq \ell \leq e^2$.

5) a) On sait que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ strictement positif, donc par continuité de la fonction logarithme népérien en ℓ, on en conclut que la suite $(\ln(u_n))$ converge vers $\ln(\ell)$.

Pour tout entier naturel n, on a : $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ln(1+\frac{1}{2^k})$ donc en passant à la limite :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})$.

Comme la fonction "ln" est continue, on sait que : $\ln(\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n) = \lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)$.

Ceci s'écrit :

$$\boxed{\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})}$$

b) On a : $\ln(\frac{\ell}{u_n}) = \ln(\ell) - \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{2^k}) - \sum_{k=0}^{n} \ln(1+\frac{1}{2^k})$.

On obtient donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\frac{\ell}{u_n}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{2^k})}$$

c) Comme $\ln(1 + \frac{1}{2^k}) \geq 0$, on a tout de suite : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\frac{\ell}{u_n}) \geq 0$ (somme de termes positifs). D'autre part, $\ln(1 + \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$ donc :

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{2^k}) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$. Au final, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln(\frac{\ell}{u_n}) \leq \frac{1}{2^n}}$$

d) En appliquant la fonction exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$, à l'encadrement précédent, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{\ell}{u_n} \leq e^{\frac{1}{2^n}}$.

En inversant (tout est strictement positif), on trouve : $e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{u_n}{\ell} \leq 1$.

En multipliant les trois membres par $-\ell < 0$, on a : $-\ell \leq -u_n \leq -\ell\, e^{-\frac{1}{2^n}}$.

Enfin, en ajoutant ℓ, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1-e^{-\frac{1}{2^n}})}$$

e) On pose : $h(x) = e^{-x} + x - 1$.

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $h'(x) = -e^{-x} + 1$.

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-x} \Leftrightarrow 0 > -x \Leftrightarrow x > 0$.

On a donc : $h'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$.

La fonction h admet donc un minimum global en 0 et ce minimum vaut $h(0) = 0$.

Ceci prouve que, pour tout réel x, on a : $h(x) \geq 0$.

Ceci s'écrit : $e^{-x} + x - 1 \geq 0$, et on a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 1 - e^{-x} \leq x}$$

Remarque : on pouvait citer la convexité de la fonction exponentielle qui garantit que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^u \geq 1 + u$, puis poser $u = -x$.

D'après ce qui précède, on peut écrire : $1-e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}$.

En multipliant par $\ell > 0$, on obtient : $\ell\,(1-e^{-\frac{1}{2^n}}) \leq \frac{\ell}{2^n}$. Avec le résultat de la question 5c), on a finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}}$$

Comme la série de terme général $\frac{\ell}{2^n}$ est convergente (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ élément de $]-1, 1[$), le critère de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } (\ell - u_n) \text{ converge}}$$

Exercice 3 ....

1) a) La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ (elle coïncide avec la fonction nulle sur $]-1, 1[$ et elle est bien définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ en tant que quotient dont le dénominateur ne s'annule pas).

- L'ensemble de définition de f est donc bien centré en 0.
- Pour tout réel x de $]-1, 1[$, $-x \in\,]-1, 1[$ donc on a $f(-x) = 0 = f(x)$.
- Pour tout réel x de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, $-x \in\,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et on a :

$f(-x) = \dfrac{1}{2(-x)^2} = \dfrac{1}{2x^2} = f(x)$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire}}$$

b) • La fonction f est bien définie sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$ comme fraction rationnelle de dénominateur strictement positif, f est donc positive sur ces deux intervalles. Comme de plus, elle est nulle sur $]-1, 1[$, alors f est positive.

• La restriction de f est continue sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle bien définie. De plus, la restriction de f est nulle sur $]-1, 1[$, donc continue sur $]-1, 1[$.
La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en -1 et en 1.

• Pour tout réel A supérieur ou égal à 1 :

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{1}{2x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2x}\right]_1^A = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{A}\right).$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A} = 0$, on en conclut, par définition d'une intégrale convergente, que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

La fonction f est paire donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx$ converge et vaut aussi $\frac{1}{2}$.

Pour finir, comme $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$, la relation de Chasles donne $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Les trois points précédents prouvent bien que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ peut être considérée comme une densité de probabilité}}$$

2) Pour tout x supérieur ou égal à 1, $x f(x) = \frac{1}{2x}$ et $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2x}\,dx$ diverge (intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 1$) donc :

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } X \text{ n'admet pas d'espérance}}$$

3) a) Par définition, pour tout réel x :
$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\ln(|X|) \leq x)$. La fonction exponentielle étant une bijection croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit : $F_Y(x) = P(|X| \leq e^x)$.
Par propriété de la valeur absolue, on a alors : $F_Y(x) = P(-e^x \leq X \leq e^x)$.
Pour conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x)}$$

b) Comme X est une variable aléatoire à densité, la fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf peut-être en -1 et en 1, il en résulte que, par composition, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0 (car 0 est le réel en lequel $e^x = 1$ et $-e^x = -1$). Ceci prouve que Y est une variable aléatoire à densité. De plus, en dérivant l'expression ci-dessus, sauf en 0, on obtient, en notant f_Y une densité de Y :
$\forall x \neq 0, f_Y(x) = e^x F_X'(e^x) + e^x F_X'(-e^x) = e^x f_X(e^x) + e^x f_X(-e^x)$.
Comme f_X est paire, on obtient : $\forall x \neq 0, f_Y(x) = 2e^x f_X(e^x)$.
Si $x < 0$, alors $0 < e^x < 1$, et on a $f_X(e^x) = 0$, puis $f_Y(x) = 0$.
Si $x > 0$, alors $e^x > 1$, et on a $f_X(e^x) = \frac{1}{2(e^x)^2}$, puis $f_Y(x) = 2e^x \frac{1}{2(e^x)^2} = e^{-x}$.

On complète la définition de f_Y en posant par exemple $f_Y(0) = 1$, ce qui donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

On reconnaît alors que :

$$\boxed{Y \text{ suit une loi exponentielle de paramètre 1}}$$

4) a) Si x est positif, alors $-x$ est négatif et, par croissance de la fonction exponentielle, on a : $e^{-x} \leq 1$, ce qui signifie : $1 - e^{-x} \geq 0$.
Comme de plus, il est toujours vrai que $e^{-x} > 0$, on a en plus $1 - e^{-x} < 1$.
On a bien :

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est positif, alors } 1 - e^{-x} \text{ appartient à } [0, 1[}$$

Si x est strictement négatif, alors $-x$ est strictement positif et, par croissance de la fonction exponentielle, on a : $e^{-x} > 1$, ce qui signifie : $1-e^{-x} < 0$.
On a bien :

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est strictement négatif, alors } 1-e^{-x} < 0}$$

Remarque : l'étude des variations de la fonction $x \mapsto 1-e^{-x}$, ainsi que sa valeur en 0, permettent d'obtenir ces deux résultats beaucoup plus rapidement.

b) Pour tout réel x, on a : $(Z \le x) = (-\ln(1-U) \le x) = (\ln(1-U) \ge -x)$.
On a donc : $F_Z(x) = P(\ln(1-U) \ge -x) = P(1-U \ge e^{-x})$, puisque la fonction exponentielle est une bijection croissante sur $\mathbb{R}$.
Tout ceci donne : $F_Z(x) = P(U \le 1-e^{-x})$.
D'après la question précédente et comme U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, on en déduit que, pour tout x positif, $F_Z(x) = 1-e^{-x}$ et que, pour tout x strictement négatif, $F_Z(x) = 0$. Ceci montre que :

$$\boxed{Z \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } 1}$$

c) La déclaration de fonction complétée est la suivante :

```
Function exp : real ;
   Begin
   exp : = –ln(1 – random) ;
   End ;
```

Problème...

Partie 1

1) a) Par lecture des images des vecteurs de base de E par f, on a :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E, on a : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$
On obtient donc, en remplaçant : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{3}(e_2+e_3), \frac{2}{3}e_1, \frac{2}{3}e_1\right)$.
Ceci se réduit à : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_1) = \mathrm{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 0))$.
Les vecteurs $(0, 1, 1)$ et $(1, 0, 0)$ ne sont pas proportionnels donc $(e_2 + e_3, e_1)$ est une famille libre et, comme elle engendre $\mathrm{Im} f$, c'est une base de $\mathrm{Im} f$.
Ceci prouve que :

$$\boxed{\dim \mathrm{Im} f = 2}$$

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, le théorème du rang permet d'affirmer que :

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker} f = 1}$$

c) Par linéarité de f, on a $f(e_2 - e_3) = 0$, ce qui prouve que $e_2 - e_3$ appartient à Ker$f$. On a $e_2 - e_3 = (0, 1, -1)$ donc $e_2 - e_3$ n'est pas nul. De plus, Ker$f$ est de dimension 1, on est donc sûr que :

$$\boxed{(e_2 - e_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker} f}$$

Par définition, Ker$f$ est l'ensemble des vecteurs u de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = 0 = 0\,u$, donc, puisque Ker$f$ n'est pas réduit au vecteur nul, on a :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f \text{ et le sous-espace propre associé est } \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)}$$

d) On va maintenant chercher les valeurs propres λ non nulles de f en résolvant le système d'équations $MX = \lambda X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Après quelques simplifications, on trouve : $MX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda x + 2y + 2z = 0 \\ x = 3\lambda y \\ x = 3\lambda z \end{cases}$.

Puisque $\lambda \neq 0$, on a : $MX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{3\lambda} x \\ z = \dfrac{1}{3\lambda} x \\ (-3\lambda + \dfrac{4}{3\lambda})x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{3\lambda} x \\ z = \dfrac{1}{3\lambda} x \\ (4 - 9\lambda^2)x = 0 \end{cases}$

Les valeurs propres de M (donc de f) sont les réels λ solutions de $4 - 9\lambda^2 = 0$ (si λ n'est pas solution de cette équation, alors le système ci-dessus n'a que le vecteur nul comme solution).

Les valeurs propres non nulles de f sont donc $\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{2}{3}$.

• Pour $\lambda = \dfrac{2}{3}$, on a : $MX = \dfrac{2}{3} X \Leftrightarrow y = z = \dfrac{1}{2} x \Leftrightarrow z = y$ et $x = 2y$.

$MX = \dfrac{2}{3} X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } f \text{ associé à la valeur propre } \frac{2}{3} \text{ est } F = \mathrm{Vect}((2,\ 1,\ 1))}$$

Comme $(2, 1, 1) \neq 0$, la famille $((2, 1, 1))$ est une base de F et on a : $\dim F = 1$.

• Pour $\lambda = -\dfrac{2}{3}$, on a : $MX = -\dfrac{2}{3} X \Leftrightarrow y = z = -\dfrac{1}{2} x \Leftrightarrow z = y$ et $x = -2y$.

$$MX = -\frac{2}{3}X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } f \text{ associé à la valeur propre } -\frac{2}{3} \text{ est } G = \mathrm{Vect}((-2, 1, 1))}$$

Comme $(-2, 1, 1) \neq 0$, la famille $((-2, 1, 1))$ est une base de F et on a : $\dim F = 1$.

e) La somme des dimensions des 3 sous-espaces propres de f (qui sont $\mathrm{Ker} f$, F et G) est égale à 3, qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

Remarque. On pouvait aussi se contenter de la condition suffisante : f possède 3 valeurs propres distinctes et f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3, donc f est diagonalisable.

2) a) La matrice P est la matrice dont les colonnes sont les colonnes des coordonnées des vecteurs de base des sous-espaces propres de f, par conséquent, comme f est diagonalisable, on sait que P est inversible (en fait P est une *matrice de passage* d'une base, la base (e_1, e_2, e_3), à une autre base, formée de vecteurs propres de f, ce qui en fait une matrice inversible). Toujours d'après le cours, la matrice M étant diagonalisable, on sait qu'il existe une matrice D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$, où les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres λ_i de M, écrites de façon que la $i^{\text{ème}}$ colonne de P soit un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ_i qui est située en $i^{\text{ème}}$ position sur la diagonale de D. On a donc :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) On a : $PQ = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$

On en déduit, par définition de l'inversibilité, que $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$, c'est-à-dire :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

c) Montrons que, pour tout entier naturel j, on a : $M^j = PD^jP^{-1}$.

• Pour $j = 0$, on a $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ et $M^0 = I$ donc : $M^0 = PD^0P^{-1}$.

• Si l'on suppose , pour un certain entier naturel j, que $M^j = PD^j P^{-1}$, alors on a : $M^{j+1} = M^jM = PD^jP^{-1} PD P^{-1} = PD^jD P^{-1} = PD^{j+1}P^{-1}$.
• On a bien :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}, M^j = PD^jP^{-1}}$$

d) Pour tout entier naturel j non nul, on a :

$$D^j P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2/3)^j & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0^j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme $j \geq 1$, on a $0^j = 0$ et la première colonne de $D^j P^{-1}$ est :

$$X_j = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2/3)^j \\ -(-2/3)^j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la première colonne de M^j est alors PX_j, soit :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (2/3)^j \\ -(-2/3)^j \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(2/3)^j + 2(-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \end{pmatrix}.$$

Pour $j = 0$, cette colonne vaut $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui est bien la première colonne de $M^0 = I$.

Conclusion : pour tout entier naturel j, la première colonne de M^j est :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(2/3)^j + 2(-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \end{pmatrix}$$

Partie 2

1) Le premier tirage consiste à tirer une boule au hasard dans l'urne (qui contient 3 boules numérotées 1, 2, 3) donc :

$$\boxed{X_1 \text{ suit la loi uniforme } \mathcal{U}_{[\![1,3]\!]}}$$

2) Le programme complété est le suivant :

```
Program simul ;
Var i, k, X, tirage : integer ;
Begin
Randomize ;   Readln(k) ; X : = random(3) + 1 ;
For i : = 2 to k do
    begin tirage : = random(3) + 1 ;  If X = 1  then X : = tirage
                                                else If tirage < > X   then X : = 1 ;
    end ;
```

Writeln (X) ;
end.

3) a) Pour tout j élément de $\{1, 2, 3\}$ et pour tout entier naturel k, on a, par équiprobabilité :

$$\boxed{P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = j) = \frac{1}{3}}$$

Pour tout j de $\{2, 3\}$ et pour tout entier naturel k, on a :

$$\boxed{P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = j) = \frac{1}{3} \text{ (il faut obtenir la boule N°}j\text{)}}$$

Pour tout j de $\{2, 3\}$ et pour tout entier naturel k, on a :

$$\boxed{P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = 1) = \frac{2}{3} \text{ (il faut obtenir une autre boule que la boule N°}j\text{)}}$$

Pour tout j de $\{2, 3\}$ et pour tout entier naturel i, on a, si $i \notin \{1, j\}$:

$$\boxed{P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i) = 0}$$

b) En écrivant 3 fois la formule des probabilités totales, associée au système complet d'événements $\{ (X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3) \}$, on obtient :

$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{3} P_{(X_k=j)} (X_{k+1} = i)\, P(X_k = j).$$

Ceci donne :

$$\boxed{\begin{aligned} P(X_{k+1} = 1) &= \frac{1}{3} P(X_k = 1) + \frac{2}{3} P(X_k = 2) + \frac{2}{3} P(X_k = 3) \\ P(X_{k+1} = 2) &= \frac{1}{3} P(X_k = 1) + \frac{1}{3} P(X_k = 2) \\ P(X_{k+1} = 3) &= \frac{1}{3} P(X_k = 1) + \frac{1}{3} P(X_k = 3) \end{aligned}}$$

La matrice A telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$ est :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

c) Avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $AU_0 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, ce qui est bien égal à U_1 puisque X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$.

Dès lors, la relation $U_{k+1} = AU_k$ est valable pour tout entier naturel k.
Montrons la relation $U_k = A^k U_0$ par récurrence sur k.
Pour $k = 0$, on a bien : $A^0 U_0 = I\,U_0 = U_0$.
Si l'on suppose, pour un entier naturel k fixé dans $\mathbb{N}$ que $U_k = A^k U_0$, alors comme $U_{k+1} = A\,U_k$ (heureusement que l'énoncé a inventé U_0) on obtient :
$U_{k+1} = A\,A^k U_0 = A^{k+1}\,U_0$. On a donc bien montré que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, U_k = A^k U_0}$$

4) a) $M + \frac{1}{3}I = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

On a bien :

$$\boxed{A = M + \frac{1}{3}I}$$

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \left(M + \frac{1}{3}I\right)^k$. Grâce à la formule du binôme, comme I et M commutent, on obtient : $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M^j \left(\frac{1}{3}I\right)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M^j \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} I$.

On a alors :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j}$$

b) D'après le résultat de la question I 2c), la première colonne de A^k est obtenue en effectuant le calcul :

$$C_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(2/3)^j + 2(-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \end{pmatrix}.$$

Le premier élément est :

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

Le deuxième élément est :

$$\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j - \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

Le troisième élément est :

$\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\frac{1}{3})^{k-j}(\frac{2}{3})^{j} - \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\frac{1}{3})^{k-j}(-\frac{2}{3})^{j} = \frac{1}{4}(1-(-\frac{1}{3})^{k}).$

Remarque : les dernières égalités de chaque ligne sont obtenues grâce à la formule du binôme, après mise en facteur de $1/4$.

La première colonne de A^k est :

$$C_k = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2(-1/3)^k) \\ 1-(-1/3)^k \\ 1-(-1/3)^k \end{pmatrix}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $U_k = A^k U_0$, donc :

$$U_k = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2(-1/3)^k & \times & \times \\ 1-(-1/3)^k & \times & \times \\ 1-(-1/3)^k & \times & \times \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2(-1/3)^k \\ 1-(-1/3)^k \\ 1-(-1/3)^k \end{pmatrix}.$$

On en déduit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$ (la variable aléatoire X_0 n'étant pas définie) :

$$\boxed{\begin{gathered} P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + (-\frac{1}{3})^k\right) \\ P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - (-\frac{1}{3})^k\right) \end{gathered}}$$

c) Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on a $\lim_{k \to +\infty} (-\frac{1}{3})^k = 0$, d'où :

$\lim_{k \to +\infty} P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{k \to +\infty} P(X_k = 2) = \lim_{k \to +\infty} P(X_k = 3) = \frac{1}{4}$.

La suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont la loi est donnée par : $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$.

5) a) Par définition de l'espérance, on a : $E(X_k) = \sum_{j=1}^{3} jP(X_k = j)$.

On obtient :

$E(X_k) = \frac{1}{2}\left(1 + (-\frac{1}{3})^k\right) + 2 \times \frac{1}{4}\left(1 - (-\frac{1}{3})^k\right) + 3 \times \frac{1}{4}\left(1 - (-\frac{1}{3})^k\right).$

$E(X_k) = \frac{1}{2}\left(1 + (-\frac{1}{3})^k\right) + \frac{5}{4}\left(1 - (-\frac{1}{3})^k\right).$

On trouve finalement :

$$\boxed{E(X_k) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^k}$$

b) Première version

• Si k est pair, alors $(-\frac{1}{3})^k = (\frac{1}{3})^k$ et on a :

$$E(X_k) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}(\frac{1}{3})^k = \frac{1}{4}(7 - 3\exp(k\ln\frac{1}{3})) = \frac{1}{4}(7 - 3\exp(-k\ln 3))$$

• Si k est impair, alors $(-\frac{1}{3})^k = -(\frac{1}{3})^k$ et on a :

$$E(X_k) = \frac{7}{4} + \frac{3}{4}(\frac{1}{3})^k = \frac{1}{4}(7 + 3\exp(k\ln\frac{1}{3})) = \frac{1}{4}(7 + 3\exp(-k\ln 3))$$

```
Function esp (k : integer) : real ;
        Begin
        If (k mod 2) = 0   then esp : = (7 – 3 * exp(– k * ln(3))) / 4
                           else esp : = (7 + 3 * exp(– k * ln(3))) / 4
        End ;
```

Deuxième version

```
Function esp (k : integer) : real ;
        var i : integer ;
        var aux : real ;
        Begin
        aux : = 1 ;
        For i : = 1 to k do aux : = aux / (–3) ;
        esp : = (7 – 3 * aux) / 4
        End ;
```

Concours **EDHEC** **2010**
Classes Préparatoires

MATHEMATIQUES

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option économique

Présentation de l'épreuve :
• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
Le sujet balayait largement le programme en donnant une place importante aux probabilités (premier exercice et problème).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme. Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé ce sujet sélectif, d'un niveau abordable, mais laissant encore plus d'initiative aux candidats que par le passé. Il a permis de bien apprécier les connaissances et les capacités à raisonner des candidats, ce qui est le premier but d'un texte de concours.

• L'exercice 1 proposait l'étude d'une fonction de 2 variables réelles dont l'étude locale en les points critiques ne permettait pas de conclure à la présence d'un extremum, mais pour laquelle l'utilisation d'une inégalité relativement élémentaire à établir garantissait la présence d'un minimum global.

• L'exercice 2 étudiait une suite (u_n) définie comme un produit, puis proposait de montrer la convergence de la série de terme général $\ell - u_n$, où ℓ désigne la limite de la suite (u_n).

• L'exercice 3 avait pour but de déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \ln|X|$, où X était une variable aléatoire suivant une loi donnée par l'énoncé, de support $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Une simulation informatique de la loi exponentielle de paramètre 1 était proposée en fin d'exercice (cette loi était bien sûr celle qu'il fallait trouver pour Y).

• Le problème, portant sur le programme d'algèbre linéaire et de probabilités, avait pour objectif d'étudier une suite de variables aléatoires discrètes attachée à une suite d'expériences aléatoires pour lesquelles une simulation informatique était proposée.

Statistiques :
Pour l'ensemble des 3482 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,38 sur 20 et l'écart type vaut 5,15.

36 % des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (dont presque un tiers ont une note inférieure à 4). Le nombre de copies très faibles (note inférieure à 4) est en diminution de 5 % par rapport à l'année dernière.
26 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12.
17 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16.

Analyse des copies :

L'exercice 1 a révélé que peu de candidats sont vraiment bien préparés aux notions du programme vues vers la fin de l'année, mais aussi que certains (trop) ne connaissent pas les notions élémentaires de calcul vues au collège…

L'exercice 2 a révélé qu'en analyse, les candidats savent, en majorité, traiter les questions classiques, mais sont capables de commettre des fautes inattendues : fautes de calcul sur les fractions, justifications maladroites ou complètement fausses d'inégalités classiques (comme $\ln(1+x) \leq x$ pour tout x plus grand que -1).

L'exercice 3, montre que beaucoup de candidats maîtrisent mal l'étude d'une variable à densité fonction d'une autre, notamment en ne s'intéressant pas à son support en tout premier, ce qui donne lieu à des discussions peu rigoureuses pour conclure.

Le problème a, en ce qui concerne sa partie d'algèbre linéaire, été correctement traité mais on sent que certains candidats ont des habitudes (appliquant des recettes) et que si on les oblige à travailler sur un schéma différent de celui qu'ils connaissent, ils se perdent.
La partie probabilités laisse encore plus perplexe : peu de candidats ont réellement su analyser correctement la description de l'expérience aléatoire qui leur était proposée.

Les copies sont en grande majorité honnêtes, les candidats précisant clairement qu'ils admettent le résultat d'une question non traitée.
Cela dit, il faut noter cette année encore que certaines copies sont mal présentées : résultats mal mis en valeur (ni encadrés, ni même soulignés), numérotation des questions non respectée, etc.
Comme l'année dernière, les correcteurs ont constaté que lorsque les résultats sont donnés par l'énoncé, certains candidats sont prêts à tout pour faire croire qu'ils ont prouvé le résultat demandé : qu'ils sachent que ceci est sanctionné très sévèrement et qu'aucun correcteur n'est dupe.
Certains correcteurs demandent donc s'il est possible d'établir un malus qui serait attribué aux copies mal présentées et/ou malhonnêtes : la question est à l'étude.

Voici une liste des quelques fautes, omissions et imprécisions les plus fréquentes (chacune d'entre elles ayant été trouvée sur un nombre significatif de copies) commises cette année :

Exercice 1

• Il est faux d'écrire que, comme $x^2 = y^2$, alors on a : $x = y$.
• Il n'est pas question de justifier la classe C^2 d'une fonction de deux variables en citant les applications $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $y \mapsto \frac{1}{y}$. Dans le cas présent, il fallait citer $(x, y) \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, et si possible, sans omettre de signaler que les dénominateurs sont différents de 0 sur $]0,+\infty[^2$.

• Une définition mal comprise : l'inégalité « $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, f(x,y) \geq 4$ » ne prouve pas que la fonction f possède un minimum global égal à 4 sur $]0,+\infty[^2$, mais seulement que 4 est un minorant de f sur $]0,+\infty[^2$.
• Le scandale : trop de candidats ne savent pas montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^2 \geq 4xy$.

Exercice 2.
• Il n'est vraiment pas bien d'écrire qu'une suite bornée converge toujours…
• Presque tous les candidats semblent ignorer qu'un majorant ne doit pas dépendre de la variable : ayant obtenu $\ln(u_n) \leq 2 - \frac{1}{2^n}$, on ne peut pas qualifier le membre de droite de majorant de $\ln(u_n)$.
• Une faute assez fréquente : ayant obtenu $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2^{n+1}}$, de nombreux candidats n'ont pas cité la positivité de u_n pour déduire la croissance de la suite (u_n).
• La majorité des candidats passent à la limite avant d'avoir établi la convergence des suites en jeu.
• L'horreur : pour certains candidats, le logarithme d'un produit est égal au produit des logarithmes !

Exercice 3
• Il n'est vraiment pas bien de manipuler des intégrales impropres avant d'en avoir établi la convergence.
• Il n'est pas correct de citer l'imparité de la fonction $t \mapsto tf(t)$ pour affirmer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = 0$. Dans le cas présent, cette dernière intégrale était divergente.
• Il est impardonnable d'enchaîner ce qui suit : $x < 0$ donc $-x < 0$ donc $e^{-x} < 1$ donc $1 - e^{-x} < 0$. Seul le deuxième "donc" est correct !
• Il faut éviter d'écrire l'égalité suivante : $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_1^A f(t)dt$, même en ajoutant ensuite « lorsque A tend vers $+\infty$ ».

Problème
• Trop de candidats oublient, après avoir trouvé Ker f = Vect($e_2 - e_3$), de préciser que le vecteur $e_2 - e_3$ est non nul afin de conclure que ($e_2 - e_3$) est une base de Ker$f$.
• Il faut absolument éviter de procéder à des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice, ce n'est pas au programme.
• Le must que l'on s'attend toujours à voir, et que l'on a vu sur un certain nombre de copies : trouver dim Ker f = 4 et dim Imf = 5, alors que f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, ce qui prouve la confusion qui règne dans l'esprit de certains candidats.

Conclusion :
Le niveau moyen semble en hausse par rapport à l'année dernière, il y a beaucoup moins de copies très faibles ("seulement" 82 copies ont moins de 2 sur 20).
Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.