
BIENVENUE
DANS NOS
RESEAUX
D'ENERGIE
Avec 250 entreprises partenaires, 27 000 anciens diplômés présents dans 121 pays, un maillage unique de professeurs, d'associations, et d'ambassadeurs, le réseau de l'EDHEC est une véritable force sur laquelle vous pourrez compter tout au long de votre cursus et de votre carrière. Venez vous inscrire dans une dimension résolument internationale et découvrir un nouveau monde, celui des réseaux et de l'excellence, qui vous ouvrira d'innombrable portes.
www.edhec-ge.com
Marc-Antoine,
étudiant en pré-Master
EDHEC
BUSINESS SCHOOL

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Lundi 7 mai 2012 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1) a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
b) En déduire les valeurs propres de f.
c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id)$.
b) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $g^2 = f$.

On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.

Établir que $\operatorname{Ker} f^2$ est stable par g puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$$

En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.

4) Étude d'un cas plus général. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par α un réel non nul.

a) On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que : $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

Montrer que : $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\, Id)$.

b) Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\, Id)$, alors on a : $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

Exercice 2

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1) a) Donner, pour tout réel x strictement positif, une densité de $-x\, X_0$.

b) Montrer que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - x\, X_0$, la fonction f définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1} e^{\lambda \frac{z}{x}} & \text{si } z < 0 \\ \dfrac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

c) On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.

2) On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \operatorname{Sup}(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n.

c) En déduire qu'il existe une densité h_n de $Y_n - X_0$ telle que :

$$\forall x < 0,\ h_n(x) = \frac{1}{n+1} \lambda e^{\lambda x}.$$

4) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \operatorname{Inf}\{k \in \mathbb{N}^*,\ X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $(Z > n) \cup (Z = 0) = (Y_n \leq X_0)$.

b) Montrer que $(Z = 0) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} (Y_k \leq X_0)$, puis établir que $P(Z = 0) = 0$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $(X = n)$ et $(Z = n)$ ont même probabilité.

5) Informatique.

a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ et on admet que V est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V.

b) Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est "**function z : real ;**" qui simule la loi de Z.

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1 et e_2 les polynômes de E définis par : $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$.
On rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste dans la division par $1+X^3$ du polynôme $(1-X+X^2)P$.
Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que :

$$(1-X+X^2)P = (1+X^3)Q + f(P), \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) a) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   b) En déduire une base de $\mathrm{Im}f$.
   c) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}f$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}f$.
3) a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathrm{Im}f$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :
$$\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}(f - 3Id)$$
   b) Montrer que f est diagonalisable.
4) On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, où l'on a noté $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$.
   a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.
   b) Vérifier que $\mathrm{Ker}f$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im}\,f$ dans E pour ce produit scalaire.
5) a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire φ.
   b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ puis retrouver le résultat de la question 4b).

Problème

On admet que, si une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ, alors on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$.

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \,,\; T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k \text{ et } y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\, x_i$$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\,x_i$.

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n$.

   b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

2) Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$.

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n .$$

a) On admet que si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I^n$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leq f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k\,x_k\right)^{1/n}$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\, y_n$.

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

e) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k$.

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a : $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x\,dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^{1} \ln x\,dx$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ -1+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}$$

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$, puis établir que : $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

4) On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$.

Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ particulière que l'on note $(x_n(N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in [\![1, N]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n}$.

a) Écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

b) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

5) Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Corrigé

Exercice 1

1) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $A^3 = 2A^2$, on peut conclure :

$\boxed{X^3 - 2X^2 \text{ est un polynôme annulateur de } A\text{, donc de } f}$

b) On sait que les valeurs propres de f sont parmi les racines de ce polynôme, par conséquent, 0 et 2 sont les seules valeurs propres possibles de f.
Par ailleurs, 0 est valeur propre de f car A n'est pas inversible (les colonnes C_2 et C_3 de A sont proportionnelles).

Pour finir, $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (les colonnes C_1 et C_2 de A sont proportionnelles).
Bilan :

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont 0 et 2}}$

c) Cherchons les sous-espaces propres de f. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

• $AX = 0X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$.

On en déduit : $AX = 0X \Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0 est : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{vect}(\,(0, 1, 1)\,)$. Comme $(0, 1, 1)$ est non nul, on est certain que : $\dim \mathrm{Ker} f = 1$.

• $AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$.

On en déduit : $AX = 2X \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2 est : $\text{Ker}(f-2Id)$ = vect((1, 1, 0)).
Comme (1, 1, 0) est non nul, on est certain que : dim $\text{Ker}(f-2Id)$ = 1.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de f n'est pas égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$ donc :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

2) En considérant la première colonne de la matrice T, on devine que le premier vecteur de la base cherchée est un vecteur de Ker$f$: on peut donc choisir u = (0, 1, 1).
En considérant la troisième colonne de la matrice T, on devine que le troisième vecteur de la base cherchée est un vecteur de Ker (f – 2Id) : on peut donc choisir w = (1, 1, 0).
Il reste à trouver le deuxième vecteur v qui, en regardant la deuxième colonne de N vérifie : $f(v) = u$. En posant $v = (a,b,c)$, on obtient : $A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} a+b-c=0 \\ -a+3b-3c=1 \\ -2a+2b-2c=1 \end{cases}$.

On trouve alors, par substitution : $\begin{cases} c=a+b \\ -4a=1 \\ -4a=1 \end{cases}$. On peut donc choisir : $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$ et $c = 0$.

On a finalement : u = (0, 1, 1), $v = (-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, 0)$ et w = (1, 1, 0) et il reste à montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme elle contient 3 vecteurs et comme dim $\mathbb{R}^3$ = 3, il suffit de prouver sa liberté.

Soit donc a, b, c trois réels tels que $au + bv + cw = 0$. Ceci s'écrit : $\begin{cases} -\dfrac{1}{4}b + c = 0 \\ a + \dfrac{1}{4}b + c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$.

Ce système équivaut à : $\begin{cases} b = 4c \\ b = -4c \\ a = 0 \end{cases}$. En soustrayant les deux premières équations membre à membre, on trouve : $\begin{cases} b = 4c \\ 8c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$. On a finalement : $a = 0$, $c = 0$ et $b = 0$. La famille (u, v, w) est bien libre.

En conclusion, la famille (u, v, w), avec $u = (0, 1, 1)$, $v = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ et $w = (1, 1, 0)$, est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) a) Remarquons tout de suite que $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker}(f - 2Id)$ sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$, ce qui est rassurant.
Une première méthode consiste à remarquer que :

$$f^2(u) = 0,\ f^2(v) = f(u) = 0$$

Ceci montre que u et v sont deux vecteurs de $\operatorname{Ker} f^2$, de plus la famille (u, v) est libre (sous-famille d'une famille libre) et, comme $\operatorname{Ker} f^2$ n'est pas de dimension 3 (sinon, on aurait $A^2 = 0$), la famille (u, v) est une base de $\operatorname{Ker} f^2$. Comme la famille (w) est une base de $\operatorname{Ker}(f - 2Id)$, on constate que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée par la juxtaposition d'une base de $\operatorname{Ker} f^2$ et d'une base de $\operatorname{Ker}(f - 2Id)$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id)}$$

Une deuxième méthode, plus calculatoire, est la suivante.

- On cherche $\operatorname{Ker} f^2$ comme si de rien n'était.

$A^2 X = 0X \Leftrightarrow 2x + 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow z = x + y$.

On a donc : $A^2 X = 0X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On obtient $\operatorname{Ker} f^2$ = vect ((1, 0, 1) , (0, 1, 1)). Les deux vecteurs de cette famille génératrice ne sont pas proportionnels donc cette famille est libre et c'est une base de $\operatorname{Ker} f^2$, d'où l'on déduit : $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 2$.
Comme $\dim \operatorname{Ker}(f - 2Id) = 1$, on obtient :

$$\dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Ker}(f - 2Id) = \dim \mathbb{R}^3$$

- On montre que $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id) = \{0\}$.

L'inclusion de $\{0\}$ dans $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id)$ étant acquise (le vecteur nul appartient à tous les espaces vectoriels), il reste à montrer que $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id) \subset \{0\}$
Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur élément de $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id)$.
On a alors : $c = a + b$ (équation de $\operatorname{Ker} f^2$ vue une dizaine de lignes plus haut) et $\begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}$ (équations de $\operatorname{Ker}(f - 2Id)$ vues à la question 1c)).
On en déduit : $0 = 2a$, $b = a$ et $c = 0$, soit $a = b = c = 0$ et on a $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id) \subset \{0\}$.
On vient bien de montrer que : $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id) = \{0\}$

Remarque. Pour ce dernier point, on pouvait plus simplement, avec u élément de $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f-2Id)$, en déduire : $f^2(u)=0$ et $f(u)=2u$, ce qui implique :
$0=f^2(u)=f(f(u))=f(2u)=2f(u)=4u$, c'est-à-dire $u=0$.
Conclusion : grâce aux deux points précédents, on a :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f-2Id)}$$

b) Supposons qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2=f$. Soit alors un vecteur u élément de $\operatorname{Ker} f^2$: on a $f^2(u)=0$.
$f^2\left(g(u)\right)=g^4\left(g(u)\right)=g^5(u)=g\left(g^4(u)\right)=g\left(f^2(u)\right)=g(0)=0$ (puisque g est linéaire).
On a donc : $f^2\left(g(u)\right)=0$, ce qui prouve que $g(u)$ appartient à $\operatorname{Ker} f^2$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f^2 \text{ est stable par } g}$$

D'après la première méthode de la question 3a), la famille $\mathcal{B}=(u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs sont des vecteurs de base de $\operatorname{Ker} f^2$.
Comme g laisse $\operatorname{Ker} f^2$ stable, alors $g(u)$ et $g(v)$ sont combinaisons linéaires de u et v, ce qui prouve que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G=\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est : $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Puisque $g^2=f$, on a $G^2=T$, ce qui donne, sans faire les calculs donnant la dernière colonne de G^2 : $\begin{pmatrix} a^2+ba' & a'(a+b') & x' \\ b'(a+d) & b'^2+bc & y' \\ 0 & 0 & z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Par identification des coefficients, on obtient entre autres : $a^2+ba' = 0$, $a'(a+b') = 1$, $b(a+b') = 0$ et $b'^2+ba' = 0$.
La deuxième équation prouve que, ni a' ni $a+b'$ ne sont nuls. En reportant cette information dans la troisième équation, on obtient : $b=0$. On en déduit avec les deux autres équations : $a=b'=0$, ce qui contredit $a'(a+b') = 1$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant : } g^2=f}$$

4) a) Procédons par analyse-synthèse.

- Analyse. Considérons x élément de $\mathbb{R}^n$ et supposons que l'on ait : $x=y+z$, avec y élément de $\operatorname{Ker} h^{n-1}$ et z élément de $\operatorname{Ker}(h-\alpha\, Id)$.

Comme z appartient à $\text{Ker}(h-\alpha\, Id)$, on a $h(z)=\alpha\, z$, puis on montre par récurrence que : $\forall p\in\mathbb{N}$, $h^p(z)=\alpha^p z$.

Pour $p=0$, on a bien $h^0(z)=Id(z)=z=\alpha^0 z$ et si l'on suppose pour un entier naturel p fixé que $h^p(z)=\alpha^p z$, alors on a : $h^{p+1}(z)=h\left(h^p(z)\right)=h\left(\alpha^p z\right)=\alpha^p h(z)=\alpha^p\alpha\, z=\alpha^{p+1} z$.

On en déduit ainsi : $h^{n-1}(z)=\alpha^{n-1}z$.

En appliquant h^{n-1} (linéaire) à l'égalité $x=y+z$, on obtient : $h^{n-1}(x)=h^{n-1}(y)+h^{n-1}(z)$.

Comme y appartient à $\text{Ker}\, h^{n-1}$, il reste : $h^{n-1}(x)=h^{n-1}(z)=\alpha^{n-1} z$.

Le réel α n'est pas nul donc on a : $z=\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)$. Il en résulte que : $y=x-\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)$.

- Synthèse. Vérifions que y et z trouvés ci-dessus sont effectivement tels que $x=y+z$, avec z élément de $\text{Ker}(h-\alpha\, Id)$ et y élément de $\text{Ker}\, h^{n-1}$.

(∗) $y+z=\left(x-\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)\right)+\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)=x$.

(∗) $h(z)=\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^n(x)$. Comme $h^n=\alpha\, h^{n-1}$, on a : $h(z)=\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\alpha\, h^{n-1}(x)=\alpha\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)=\alpha\, z$.

On a donc bien : $z\in\text{Ker}(h-\alpha\, Id)$.

(∗) $h^{n-1}(y)=h^{n-1}\left(x-z\right)=h^{n-1}(x)-h^{n-1}(z)=\alpha^{n-1}z-h^{n-1}(z)=0$ (car $h(z)=\alpha\, z$ et on a, comme dans la partie "analyse", $h^{n-1}(z)=\alpha^{n-1}z$).

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{R}^n=\text{Ker}\, h^{n-1}\oplus\text{Ker}(h-\alpha\, Id)}$$

b) Si $\mathbb{R}^n=\text{Ker}\, h^{n-1}\oplus\text{Ker}(h-\alpha\, Id)$, alors tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $x=y+z$, avec y élément de $\text{Ker}\, h^{n-1}$, ce qui s'écrit $h^{n-1}\left(y\right)=0$, et z élément de $\text{Ker}(h-\alpha\, Id)$, ce qui s'écrit $h(z)=\alpha\, z$.

Dès lors, on obtient, pour tout x de $\mathbb{R}^n$ (et grâce à la linéarité de h) :

$h^n(x)=h^n(y+z)=h^n(y)+h^n(z)=h\left(h^{n-1}\left(y\right)\right)+h^{n-1}\left(h(z)\right)=h(0)+h^{n-1}\left(\alpha\, z\right)=\alpha\, h^{n-1}\left(\, z\right)$.

D'autre part, on a : $\alpha\, h^{n-1}(x)=\alpha\, h^{n-1}(y+z)=\alpha\, h^{n-1}(y)+\alpha\, h^{n-1}(z)=\alpha\, h^{n-1}(z)$

On a donc : $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $h^n(x)=\alpha\, h^{n-1}(x)$.

Ceci prouve bien que :

$$\boxed{h^n=\alpha\, h^{n-1}}$$

Exercice 2

1) a) D'après le cours, $-x\, X_0$ est une variable à densité et, comme $x>0$, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_-$.

Pour tout réel négatif t, on a (en notant $F_{-x\, X_0}$ et F_{X_0} les fonctions de répartition respectives de $-x\, X_0$ et de X_0) : $F_{-x\, X_0}(t)=P(-x\, X_0\le t)=P(X_0\ge -\dfrac{t}{x})=1-F_{X_0}(-\dfrac{t}{x})$.

Comme $-\dfrac{t}{x}\ge 0$, on a : $F_{-x\, X_0}(t)=1-\left(1-e^{\lambda\frac{t}{x}}\right)=e^{\lambda\frac{t}{x}}$.

Bilan : $F_{-xX_0}(t)=\begin{cases} e^{\lambda\frac{t}{x}} \text{ si } t\le 0 \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

En dérivant sauf en 0 où l'on pose $f_{-xX_0}(0)=\dfrac{\lambda}{x}$, on obtient une densité f_{-xX_0} de $-xX_0$:

$$\boxed{f_{-xX_0}(t)=\begin{cases} \dfrac{\lambda}{x}e^{\lambda\frac{t}{x}} \text{ si } t\le 0 \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}}$$

b) Une densité de X_1-xX_0 s'obtient par convolution des densités de X_1 et de $-xX_0$. Comme les densités f_{X_1} et f_{-xX_0} de X_1 et de $-xX_0$ sont bornées (une seule le serait que ce serait suffisant), on est sûr que l'on a une densité *f* de X_1-xX_0 en posant :

$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)f_{-xX_0}(z-t)\,dt$. Cherchons l'intervalle sur lequel la fonction intégrée est non nulle : $f_{X_1}(t)f_{-xX_0}(z-t)\neq 0 \Leftrightarrow t\ge 0$ et $z-t\le 0 \Leftrightarrow t\ge \max(0,z)$.

- Si $z\ge 0$, on obtient :

$f(z)=\int_z^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{\lambda}{x}e^{\lambda\frac{z-t}{x}}\,dt = \dfrac{\lambda^2}{x}e^{\lambda\frac{z}{x}}\int_z^{+\infty} e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})t}\,dt$.

Pour tout *A* supérieur ou égal à *z*, on a (car $\lambda(1+\dfrac{1}{x})\neq 0$) :

$\int_z^A e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})t}\,dt=\dfrac{-1}{\lambda(1+\frac{1}{x})}\left[e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})t}\right]_z^A=\dfrac{-1}{\lambda(1+\frac{1}{x})}\left(e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})A}-e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})z}\right)$.

Comme $\lambda(1+\dfrac{1}{x})>0$, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})A}=0$ et il en résulte : $\int_z^{+\infty} e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})t}\,dt=\dfrac{e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})z}}{\lambda(1+\frac{1}{x})}$.

$$\forall z\ge 0,\ \ f(z)=\frac{\lambda^2}{x}e^{\lambda\frac{z}{x}}\frac{e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})z}}{\lambda(1+\frac{1}{x})}=\frac{\lambda}{x+1}e^{-\lambda z}$$

- Si $z<0$, on obtient :

$f(z)=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{\lambda}{x}e^{\lambda\frac{z-t}{x}}\,dt=\dfrac{\lambda^2}{x}e^{\lambda\frac{z}{x}}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})t}\,dt$.

De la même façon que précédemment, on trouve :

$$\forall z<0,\ \ f(z)=\frac{\lambda^2}{x}e^{\lambda\frac{z}{x}}\frac{1}{\lambda(1+\frac{1}{x})}=\frac{\lambda}{x+1}e^{\lambda\frac{z}{x}}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Une densité de } X_1 - x X_0 \text{ est la fonction } f \text{ définie par : } f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1} e^{\lambda \frac{z}{x}} \text{ si } z < 0 \\ \dfrac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} \text{ si } z \geq 0 \end{cases}}$$

c) La variable aléatoire T est (presque sûrement) bien définie (puisque l'on peut considérer que X_0 prend des valeurs strictement positives) et T prend des valeurs positives donc on a déjà : $\forall x < 0,\ F_T(x) = 0$.

Pour tout réel x positif, on a :

$$F_T(x) = P(\frac{X_1}{X_0} \leq x) = P(X_1 \leq x X_0) = P(X_1 - x X_0 \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} f(z)\,dz$$

La deuxième égalité est justifiée par le fait que X_0 prend des valeurs positives.

En remplaçant, on obtient : $\forall x \geq 0,\ F_T(x) = \dfrac{\lambda}{x+1} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda \frac{z}{x}}\,dz$.

Pour tout réel A négatif, on a (car $\dfrac{\lambda}{x} \neq 0$) : $\displaystyle\int_{A}^{0} e^{\lambda \frac{z}{x}}\,dz = \frac{1}{\lambda / x}\left[e^{\lambda \frac{z}{x}} \right]_A^0 = \frac{x}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda \frac{A}{x}} \right)$.

Comme $\dfrac{\lambda}{x} > 0$, on a $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} e^{\lambda \frac{A}{x}} = 0$ et il en résulte : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda \frac{z}{x}}\,dz = \frac{x}{\lambda}$.

En remplaçant, on trouve : $\forall x \geq 0,\ F_T(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Conclusion :

$$\boxed{F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

2) Comme $X = \lfloor T \rfloor + 1$, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $P(X = n) = P(\lfloor T \rfloor + 1 = n) = P(\lfloor T \rfloor = n-1) = P(n-1 \leq T < n)$.

Par conséquent, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = F_T(n) - F_T(n-1) = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n}$.

Bilan :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}}$$

3) a) En reprenant le calcul fait à la question 1a) avec $x = 1$, on trouve une densité de $-X_0$:

$$\boxed{f_{-X_0}(t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda t} \text{ si } t \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

b) Comme Y_n prend la plus grande des valeurs prises par $(X_1, ..., X_n)$, dire que Y_n prend une valeur inférieure ou égale à x, c'est dire que chacune des variables $X_1, ..., X_n$ prend une valeur inférieure ou égale à x.

On a donc : $G_n(x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \le x]\right)$.

Par indépendance mutuelle des variables X_k, on obtient : $G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} P\left(X_k \le x\right)$.

Pour finir, comme les X_k suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre λ, on a :

$$\boxed{G_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda x})^n \text{ si } x \ge 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

On dérive G_n, sauf en 0 où l'on pose $g_n(0) = 0$, et on trouve une densité g_n de Y_n :

$$\boxed{g_n(x) = \begin{cases} \lambda n\, e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} \text{ si } x \ge 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

c) Ici encore, la fonction f_{-X_0} est bornée donc une densité de $Y_n - X_0$ est la fonction h_n définie par : $h_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) f_{-X_0}(x-t)\, dt$.

$g_n(t) f_{-X_0}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow t \ge 0$ et $x - t \le 0 \Leftrightarrow t \ge \max(0, x)$.

Pour tout réel x négatif, cette condition devient $t \ge 0$ et on obtient :

$h_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda n\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1} \lambda\, e^{\lambda(x-t)}\, dt = \lambda n e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-2\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\, dt$.

On peut écrire : $h_n(x) = \lambda n e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t}-1)(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\, dt$.

On a donc : $h_n(x) = -\lambda n e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\left((1-e^{-\lambda t})^n - (1-e^{-\lambda t})^{n-1}\right) dt$.

Les intégrales $\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\, dt$ convergent. En effet, pour tout réel A positif, on a :

$$\int_0^A \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n\, dt = \left[\frac{1}{n+1}(1-e^{-\lambda t})^{n+1}\right]_0^A = \frac{1}{n+1}(1-e^{-\lambda A})^{n+1}$$

Comme $\lambda > 0$, on a $\lim_{A \to +\infty} e^{-\lambda A} = 0$ et il en résulte : $\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n\, dt = \frac{1}{n+1}$.

On a de la même manière : $\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\, dt = \frac{1}{n}$.

On peut donc scinder l'intégrale définissant $h_n(x)$, ce qui donne :

$h_n(x) = -\lambda n e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n\, dt + \lambda n e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\, dt$.

$h_n(x) = -\lambda n e^{\lambda x} \times \frac{1}{n+1} + \lambda n e^{\lambda x} \times \frac{1}{n} = \lambda n\, e^{\lambda x}\left(\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$.

Finalement, on trouve :

$$\boxed{\forall x < 0,\ h_n(x) = \frac{1}{n+1}\lambda\, e^{\lambda x}}$$

4) a) L'événement ($Y_n \le X_0$) est réalisé si, et seulement si, tous les événements ($X_1 \le X_0$), ($X_2 \le X_0$), ..., ($X_n \le X_0$) sont réalisés, ce qui signifie que, soit ($Z > n$) est réalisé, soit $(Z = 0)$ est réalisé.
On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (Z > n) \cup (Z = 0)\ = (Y_n \le X_0)}$$

b) $(Z = 0)$ est réalisé si et seulement si "le record n'est jamais battu", c'est-à-dire qu'aucune des variables X_k ne prend une valeur strictement supérieure à celle prise par X_0. En d'autres termes, comme Y_k = Sup(X_1, ..., X_k), toutes les variables Y_k prennent des valeurs inférieures ou égales à celle prise par X_0.
Ceci s'écrit :

$$\boxed{(Z = 0)\ = \bigcap_{k=1}^{+\infty}(Y_k \le X_0)}$$

Si $(Y_{n+1} \le X_0)$ est réalisé, alors les événements ($X_1 \le X_0$), ($X_2 \le X_0$), ..., ($X_n \le X_0$), ($X_{n+1} \le X_0$) sont réalisés, ce qui implique que, en particulier, les événements ($X_1 \le X_0$), ($X_2 \le X_0$), ..., ($X_n \le X_0$) sont réalisés et ainsi ($Y_n \le X_0$) est réalisé.
Par conséquent, on a : ($Y_{n+1} \le X_0$) $\subset$ ($Y_n \le X_0$).
La suite $\left((Y_n \le X_0)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite décroissante d'événements et le théorème de limite monotone assure que : $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(Y_n \le X_0)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(Y_n \le X_0)$.
Pour finir, on a : $P(Y_n \le X_0)\ =\ P(Y_n - X_0 \le 0)\ =\ \int_{-\infty}^{0} h_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{0} \lambda\, e^{\lambda x}\,dx$. Comme l'intégrale ne dépend pas de n et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y_n \le X_0)\ = 0$.
On a donc : $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(Y_n \le X_0)\right) = 0$.
D'après le résultat établi au début de cette question, on peut conclure :

$$\boxed{P(Z = 0) = 0}$$

Remarque. On pouvait aussi utiliser le corollaire du théorème de limite monotone après avoir pris soin de justifier que $\bigcap_{k=1}^{n}(Y_k \le X_0)\ = (Y_n \le X_0)$. On avait ensuite :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(Y_n \le X_0)\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(Y_k \le X_0)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n \le X_0) = 0\,.$$

c) D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z>n) = P(Y_n \le X_0) = P(Y_n - X_0 \le 0)$$

Grâce à la question 3c), on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z>n) = \int_{-\infty}^{0} h_n(x)\,dx = \dfrac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{0} \lambda e^{\lambda x}\,dx$.

Pour tout réel A négatif, on a : $\int_A^0 \lambda e^{\lambda x}\,dx = \left[e^{\lambda x}\right]_A^0 = 1 - e^{\lambda A}$.

Comme λ est strictement positif, on a $\lim\limits_{A\to-\infty} e^{\lambda A} = 0$ et on obtient : $\int_{-\infty}^{0} \lambda e^{\lambda x}\,dx = 1$.

Finalement, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z>n) = \dfrac{1}{n+1}$.

Pour terminer, on a : $(Z \ge n) = (Z>n) \cup (Z=n)$.

Par incompatibilité, on en déduit : $P(Z \ge n) = P(Z>n) + P(Z=n)$.

Enfin, comme Z prend des valeurs entières, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (Z \ge n) = (Z > n-1)$.

On trouve alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z=n) = P(Z>n-1) - P(Z>n) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ les événements } (X=n) \text{ et } (Z=n) \text{ ont même probabilité}}$$

5) a) En notant F_V et F_U les fonctions de répartition de V et U, on a, pour tout réel x :

$F_V(x) = P(V \le x) = P(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \le x) = P(\ln(1-U) \ge -\lambda x) = P(1-U \ge e^{-\lambda x})$.

La dernière égalité provient du fait que la fonction exponentielle est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = P(U \le 1 - e^{-\lambda x}) = F_{UV}(1-e^{-\lambda x})$.

La fonction exponentielle est à valeurs dans $]0, +\infty[$ donc : $1 - e^{-\lambda x} < 1$.

- Si $x \ge 0$, alors, comme $\lambda > 0$, $e^{-\lambda x} \le 1$ et $1 - e^{-\lambda x} \ge 0$. On en déduit que : $0 \le 1 - e^{-\lambda x} < 1$.

On peut alors remplacer et obtenir : $F_V(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

- Si $x < 0$, alors $e^{-\lambda x} > 1$ et $1 - e^{-\lambda x} < 0$. On en déduit que : $F_V(x) = 0$.

On a donc le résultat :

$$\boxed{V \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda}$$

b) Il y a deux façons de faire :

- On peut remarquer que simuler la loi de Z, c'est simuler la loi de X, puisque X et Z ont même loi. On peut donc simuler d'abord la loi de T (quotient de deux variables suivant la loi exponentielle de paramètre λ), puis en prendre la partie entière et ajouter 1.

Comme random simule la loi uniforme sur $[0,1[$, on sait, d'après le résultat de la question 5a), que $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\text{random})$ simule la loi exponentielle de paramètre λ.

Voici une première version de fonction simulant la loi de Z :

```
function z : integer ;
var t : real ;
Begin
t : = ln(1− random) / ln(1− random) ;      {les facteurs −1/λ se sont simplifiés}
z : = trunc(t) + 1 ;
End ;
```

• On pouvait aussi simuler directement la loi de Z de la façon suivante :

```
function z (lambda : real) : integer ;
var k : = integer ; X0 : real ;
Begin
X0 : = –ln(1 – random) / lambda ; k : = 0 ;
Repeat  k : = k+1 ; until –ln(1 – random) / lambda > X0 ;
z : = k ;
End ;
```

Exercice 3

1) Par définition de la division euclidienne, on sait que $f(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Montrons maintenant que f est linéaire.

Soit P_1 et P_2 deux polynômes de E et λ un réel.

La division de $(1-X+X^2)P_1$ par $(1+X^3)$ garantit qu'il existe un unique polynôme Q_1 tel que : $(1-X+X^2)P_1 = (1+X^3)Q_1 + f(P_1)$ (1)

De même, en divisant $(1-X+X^2)P_2$ par $(1+X^3)$, on sait qu'il existe un unique polynôme Q_2 tel que : $(1-X+X^2)P_2 = (1+X^3)Q_2 + f(P_2)$ (2)

En multipliant l'égalité (1) par λ et en ajoutant l'égalité (2), on obtient :

$(1-X+X^2)(\lambda P_1 + P_2) = (1+X^3)(\lambda Q_1 + Q_2) + \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

Par ailleurs, la division euclidienne de $(1-X+X^2)(\lambda P_1 + P_2)$ par $(1+X^3)$ assure qu'il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme, noté $f(\lambda P_1 + P_2)$ selon l'énoncé, tels que :

$$(1-X+X^2)(\lambda P_1 + P_2) = (1+X^3)Q + f(\lambda P_1 + P_2)$$

Par unicité, on a donc : $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$$

2) a) On a : $(1-X+X^2)1 = (1+X^3)\,0 + 1-X+X^2$.

Par unicité, on a donc $f(e_0) = 1-X+X^2$, d'où :

$$\boxed{f(e_0) = e_0 - e_1 + e_2}$$

De même, on a : $(1-X+X^2)X = (1+X^3)\,1\ -1+X-X^2$.

Par unicité, on a donc $f(e_1) = -1+X-X^2$, d'où :

$$\boxed{f(e_1) = -e_0 + e_1 - e_2}$$

Enfin : $(1-X+X^2)X^2 = (1+X^3)(X-1) + 1-X+X^2$.
Par unicité, on a donc $f(e_2) = 1-X+X^2$, d'où :

$$\boxed{f(e_2) = e_0 - e_1 + e_2}$$

On constate que l'on a bien :

$$\boxed{f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)}$$

b) Comme (e_0, e_1, e_2) est une base de E, on a $\text{Im} f = \text{vect}(f(e_0), f(e_1), f(e_2))$.
Comme $f(e_1) = -f(e_0)$ et $f(e_2) = f(e_0)$, il reste (par exemple) : $\text{Im} f = \text{vect}(f(e_0))$.
Pour finir, $\text{Im} f = \text{vect}(e_0 - e_1 + e_2)$.
Comme $e_0 - e_1 + e_2 \neq 0$, on est sûr que $(e_0 - e_1 + e_2)$ est une famille libre.
On peut conclure :

$$\boxed{(e_0 - e_1 + e_2) \text{ est une base de } \text{Im} f}$$

c) Comme $\text{rg}(f) = 1$ et $\dim E = 3$, le théorème du rang montre que : $\dim \text{Ker} f = 2$.

De plus, par linéarité de f, on a $f(e_0 + e_1) = 0$ et $f(e_1 + e_2) = 0$, ce qui prouve que $e_0 + e_1$ et $e_1 + e_2$ sont deux vecteurs de $\text{Ker} f$. Ces deux vecteurs forment une famille libre (sinon il existerait deux réels α et β non tous les deux nuls tels que $\alpha(e_0 + e_1) + \beta(e_1 + e_2) = 0$, d'où l'on tirerait $\alpha\, e_0 + (\alpha + \beta)e_1 + \beta\, e_2 = 0$, ce qui contredirait le fait que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E). Par conséquent, la famille $(e_0 + e_1, e_1 + e_2)$ est une famille libre de 2 vecteurs de $\text{Ker} f$ et $\dim \text{Ker} f = 2$ donc :

$$\boxed{(e_0 + e_1, e_1 + e_2) \text{ est une base de } \text{Ker} f}$$

3) a) Avec les résultats de la question 2a), on a (par linéarité de f):

$$f(e_0 - e_1 + e_2) = 3(e_0 - e_1 + e_2)$$

Comme tout polynôme P de $\text{Im} f$ est proportionnel à $e_0 - e_1 + e_2$, on obtient, en posant $P = \alpha(e_0 - e_1 + e_2)$:

$$f(P) = f\left(\alpha(e_0 - e_1 + e_2)\right) = \alpha f\left(e_0 - e_1 + e_2\right) = 3\alpha\left(e_0 - e_1 + e_2\right) = 3P.$$

$$\boxed{\forall P \in \text{Im} f,\ f(P) = 3P}$$

Comme, en particulier, le vecteur $e_0 - e_1 + e_2$ est non nul, ceci montre que 3 est valeur propre de f.
Ce qui vient d'être fait permet d'écrire : $\text{Im} f \subset \text{Ker}(f - 3Id)$.
Pour finir, si P appartient à $\text{Ker}(f-3Id)$, alors $f(P) = 3P$, soit $P = \dfrac{1}{3} f(P) = f(\dfrac{1}{3}P)$, ce qui prouve que P appartient à $\text{Im} f$. On a donc l'inclusion : $\text{Ker}(f - 3Id) \subset \text{Im} f$.
Bilan :

$$\boxed{3 \text{ est valeur propre de } f \text{ et } \text{Im} f = \text{Ker}(f - 3Id)}$$

b) Première méthode. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique réelle donc f est diagonalisable.

Deuxième méthode. En notant $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ, on a d'après la question 2c) : $E_0(f) = \mathrm{Ker} f$ et $\dim E_0(f) = 2$.
On a aussi, d'après la question 3a) : $E_3(f) = \mathrm{Im} f$ et $\dim E_3(f) = 1$.
On a donc $\dim E_3(f) + \dim E_0(f) = \dim E$, ce qui prouve que :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

4) a) On a $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$ donc φ est bien une application à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k = \sum_{k=0}^{2} b_k a_k = \varphi(Q,P)$. L'application φ est donc symétrique.

Pour tous polynômes P_1, P_2 et Q de E et tout réel λ, on a :

$\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \sum_{k=0}^{2} (\lambda a_{1,k} + a_{2,k}) b_k = \lambda \sum_{k=0}^{2} a_{1,k} b_k + \sum_{k=0}^{2} a_{2,k} b_k$. On a donc :

$\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda \varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$.

L'application φ est linéaire à gauche et, par symétrie, φ est bilinéaire.

$\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{2} a_k^2 \geq 0$ donc φ est positive (car les a_k sont réels).

Si $\varphi(P,P) = 0$, alors $\sum_{k=0}^{2} a_k^2 = 0$. Cette somme est une somme de réels positifs qui est nulle, donc chacun de ses termes est nul, d'où : $\forall k \in \{0, 1, 2\}$, $a_k = 0$.
On en déduit $P = 0$ et la forme φ est définie positive.
En conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

4) b) Il faut montrer que tout vecteur de $\mathrm{Ker} f$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{Im} f$, ce qui montrera que $\mathrm{Ker} f \subset (\mathrm{Im} f)^\perp$, l'égalité étant assurée puisque :
$\dim \mathrm{Ker} f = 3 - \dim \mathrm{Im} f = \dim (\mathrm{Im} f)^\perp$.
De plus, comme $\mathrm{Ker} f = \mathrm{vect}(e_0 + e_1,\ e_1 + e_2)$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}(e_0 - e_1 + e_2)$, il suffit de montrer que $(e_0 + e_1) \perp (e_0 - e_1 + e_2)$ et $(e_1 + e_2) \perp (e_0 - e_1 + e_2)$.

$\varphi(e_0 + e_1,\ e_0 - e_1 + e_2) = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 1 = 0$.

$\varphi(e_1 + e_2,\ e_0 - e_1 + e_2) = 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$.

On a bien montré que :

$$\boxed{\mathrm{Ker} f \text{ est le supplémentaire orthogonal de } \mathrm{Im} f \text{ dans } E}$$

5) a) Par définition de φ, on vérifie :
$\varphi(e_0, e_1) = 1\times0 + 0\times1 + 0\times0 = 0$.
$\varphi(e_0, e_2) = 1\times0 + 0\times0 + 0\times1 = 0$.
$\varphi(e_1, e_2) = 0\times0 + 1\times0 + 0\times1 = 0$.
$\varphi(e_0, e_0) = 1\times1 + 0\times0 + 0\times0 = 1$.
$\varphi(e_1, e_1) = 0\times0 + 1\times1 + 0\times0 = 1$.
$\varphi(e_2, e_2) = 0\times0 + 0\times0 + 1\times1 = 1$.
On a bien montré que :

$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base orthonormale pour } \varphi}$

b) D'après les résultats de la question 2a), la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice de f dans une base orthonormale est symétrique réelle donc f est un endomorphisme symétrique, ce qui prouve que ses sous-espaces propres, $\mathrm{Ker}\,(f-3Id)$ et $\mathrm{Ker}f$, sont supplémentaires orthogonaux.
On retrouve bien le résultat de la question 4b), puisque $\mathrm{Ker}(f-3Id) = \mathrm{Im}f$.

Problème

Partie 1

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i\,x_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k(k+1)} i\,x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} i\,x_i$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{i=1}^{n} i\,x_i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} i\,x_i \sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

Après "télescopage", on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{i=1}^{n} i\,x_i\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} (1 - \frac{i}{n+1})\,x_i$.

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\,x_i}$$

On peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=i}^{n} 1 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_i$.

En intervertissant les sommes, on trouve :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_i = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n} S_j$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = T_n}$$

Remarque. On pouvait aussi "partir" de $T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n} S_j$, puis remplacer S_j et trouver, après permutation des sommes : $T_n = = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i(n+1-i)$, ce qui faisait le lien avec la première partie du calcul.

b) Comme la série de terme général x_k est convergente, la suite (S_n) est convergente et, en notant S sa limite, on sait, d'après le résultat admis au début du problème, que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k = S$$

De plus, on a $T_n = \dfrac{n}{n+1}\times\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$, ce qui prouve que : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = S$.

D'après la question 2a), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} y_k = S$.

Ceci signifie que la série de terme général y_n converge et que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n}$$

2) a) • L'inégalité proposée est évidente si l'un au moins des réels a_k est nul (elle confirme que 0 est inférieur ou égal à un nombre positif).

• Sinon, on utilise la fonction logarithme népérien qui est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (en effet $\ln''(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0$), ce qui donne :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln a_k \le \ln\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$.

Grâce aux propriétés du logarithme, on a successivement :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\dfrac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right) \le \ln\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) \le \ln\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$.

Par croissance de la fonction exponentielle, on obtient :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \le \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$.

En regroupant les deux points précédents, on a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\left(\mathbb{R}_+\right)^n,\ \left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k}$$

b) On a : $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}\left(\dfrac{\prod_{k=1}^{n}k}{\prod_{k=1}^{n}k}\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}\dfrac{\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)^{1/n}}{(n!)^{1/n}}$.

On a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n}k\,x_k\right)^{1/n}}$$

On sait, d'après la question 2a), que : $\left(\prod_{k=1}^{n} k\,x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,x_k$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leq \frac{1}{(n!)^{1/n}} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,x_k$.

Comme $y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k\,x_k$, on a : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,x_k = (n+1)\,y_n$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\ y_n}$$

c) L'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ est une conséquence de la concavité de la fonction logarithme népérien : la courbe de $x \mapsto \ln(1+x)$ est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, tangente qui a pour équation : $y = x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leq x}$$

Remarque. On pouvait aussi étudier la fonction g : $x \mapsto \ln(1+x) - x$ dont la dérivée est $x \mapsto \frac{-x}{1+x}$, qui est négative sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et comme $g(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \leq 0$ (ce qui est le résultat demandé).

d) On sait que : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

En appliquant le résultat de la question précédente avec $x = \frac{1}{n}$ (qui est bien positif), on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Ceci s'écrit aussi $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1$, et, par croissance de la fonction exponentielle, on obtient : $\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \leq e$. On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e}$$

e) $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)^k}{\prod_{k=1}^{n}k^k} = \frac{\prod_{j=2}^{n+1} j^{j-1}}{\prod_{k=1}^{n}k^k} = \frac{\prod_{j=2}^{n+1} j^j \prod_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}}{\prod_{k=1}^{n}k^k} = \frac{\prod_{j=2}^{n+1} j^j}{\prod_{k=1}^{n}k^k} \times \frac{1}{(n+1)!}$. Les deux produits restants se "télescopent" et on a : $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = (n+1)^{n+1} \times \frac{1}{(n+1)!}$.

En simplifiant par $n+1$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k}$$

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(n+1)^n}{n!} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k$.

D'après le résultat obtenu à la question 2d), on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k \leq e$.

On en déduit, en multipliant membre à membre ces inégalités : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n$.

Comme la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $\dfrac{n+1}{(n!)^{1/n}} \leq e$.

Pour finir, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leq \dfrac{n+1}{(n!)^{1/n}}\ y_n$. On peut donc écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leq e\ y_n$.

D'après la question 1b), la série de terme général y_n converge donc, grâce au critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général z_n converge aussi et on a de plus : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Toujours grâce à la question 1b), on sait que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Par conséquent :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n}$$

3) a) Pour tout entier naturel n non nul et pour tout k élément de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\forall x \in \left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right],\ \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln x \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

En intégrant de $\dfrac{k}{n}$ à $\dfrac{k+1}{n}$, (fonctions continues et bornes dans l'ordre croissant), on trouve :

$$\boxed{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x\,dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)}$$

b) On sait qu'une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto x\ln x - x$. Par conséquent, on a :

$\displaystyle\int_{1/n}^{1} \ln x\,dx = \left[\,x\ln x - x\,\right]_{1/n}^{1} = -1 - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$.

En arrangeant, on trouve :

$$\boxed{\int_{1/n}^{1} \ln x\,dx = -1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}}$$

En sommant pour k allant de 1 à $n-1$ l'égalité obtenue à la question 3a) , on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{1/n}^{1}\ln x\,dx\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Après changement d'indice dans la deuxième somme, on a :

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{1/n}^{1}\ln x\,dx\leq\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

On trouve alors : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}\ln\frac{n}{n}\leq\int_{1/n}^{1}\ln x\,dx\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

En simplifiant : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{1/n}^{1}\ln x\,dx\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{\ln n}{n}$.

On obtient, en remplaçant l'intégrale par son expression :

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq-1+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{\ln n}{n}$.

En recentrant cet encadrement, on a :

$$\boxed{-1+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq-1+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}}$$

c) Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$,on obtient par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=-1}$$

Ce qui précède s'écrit : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k-\ln n\right)=-1$. Avec les propriétés du logarithme, on a aussi : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\ln(n!)-\ln n\right)=-1$, ce qui s'écrit encore : $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{(n!)^{1/n}}{n}\right)=-1$.

Par continuité de la fonction exponentielle, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n!)^{1/n}}{n}\right)=\frac{1}{e}$.

En écrivant autrement, on trouve : $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{e}{n}}{\frac{1}{(n!)^{1/n}}}\right)=1$.

On a donc bien :

$$\boxed{\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e}{n}}$$

4) a) Comme les termes de la suite $\left(x_n(N)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont nuls dès que n est strictement supérieur à N, on a :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}$$

De plus, on a : $\forall n \leq N,\ z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{1/n} = \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}$.

On a aussi : $\forall n > N,\ z_n(N) = 0$ (puisque le produit contient au moins un facteur nul).

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}}$$

b) Comme la série de terme général $\frac{e}{n}$ est divergente (la série de Riemann de paramètre 1 diverge), le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs garantit que la série de terme général $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}$ diverge également.

En tenant compte du résultat admis par l'énoncé, on peut en déduire que :

$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{N\to+\infty}{\sim} e\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, ce qui signifie d'après la question 4a) : $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$.

On a donc :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e}$$

5) S'il existait une constante λ strictement inférieure à e telle que, pour toute suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge, on ait :

$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, alors, en écrivant cette inégalité pour la suite $\left(x_n(N)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on aurait :

$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$. En divisant par la somme de gauche (strictement positive), on obtiendrait : $\dfrac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} \leq \lambda$, et en prenant la limite lorsque N tend vers $+\infty$, on aurait :

$\lim_{N \to +\infty} \dfrac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} \leq \lambda$. Comme $\lambda < e$, ceci contredit le résultat de la question 4b), on peut conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

EDHEC 2012

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option scientifique

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme. Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet long, assez difficile et sélectif. La présence de nombreuses questions techniquement difficiles ou abstraites a permis de bien apprécier, d'une part les capacités à mener un calcul compliqué à son terme et d'autre part les capacités à raisonner des candidats : ceux d'entre eux qui étaient bien préparés se sont très bien démarqués alors que ceux qui l'étaient moins ont montré leurs faiblesses théoriques ainsi que leur mauvaise maîtrise des techniques de base.

• **L'exercice 1** proposait l'étude d'un endomorphisme *f* de $\mathbb{R}^3$ pour lequel on établissait que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, f^2 \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id)$. On prouvait ensuite qu'il n'existe pas d'endomorphisme *g* de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 = f$. La dernière question proposait plus généralement, pour un endomorphisme *h* de $\mathbb{R}^n$, de montrer l'équivalence : $h^n = \alpha h^{n-1} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, h^{n-1} \oplus \mathrm{Ker}(h - \alpha Id)$, où α désigne un réel non nul.

Cet exercice, théorique, a été très discriminant. Les correcteurs ont pu mesurer à quel point les connaissances en algèbre linéaire de très nombreux candidats sont fragiles, surtout dès que les questions posées sortent de l'ordinaire.

• **L'exercice 2** présentait une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé (Ω, A, *P*), indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).
On considérait ensuite les variables aléatoires *X* et *Z* définies par :
X = $\left\lfloor \dfrac{X_1}{X_0} \right\rfloor + 1$ et *Z* = Inf $\{k \in \mathbb{N}^*, X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et *Z* = 0 si cet ensemble est vide, et on montrait qu'elles suivaient la même loi.

Cet exercice, très technique (il y avait entre autres deux produits de convolution à effectuer) a permis aux candidats solides de clairement se démarquer.

• **L'exercice 3** avait pour but d'établir que l'application *f* qui, à tout polynôme *P* de *E* (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2), associe le reste dans la division par $1 + X^3$ du polynôme $(1 - X + X^2)$ *P* est un endomorphisme diagonalisable.

On montrait ensuite que le noyau et l'image de *f* étaient supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe $\sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, avec $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et
$Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$.

La première question, portant explicitement sur la division euclidienne, a rebuté un certain nombre de candidats, mais nombre d'entre eux ont su tirer leur épingle du jeu sur les questions suivantes.

• **Le problème**, portant sur le programme d'analyse, considérait une suite $(x_n)_{n\in ¥^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. On posait alors : $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$.

Dans un premier temps, on montrait que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie : $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Dans un deuxième temps, on montrait que e est la plus petite des constantes λ pour lesquelles on a $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Ce problème, calculatoire et technique, a été sélectif en permettant de tester la fiabilité des candidats face à des calculs de sommes et de produits et face à des questions de convergence (souvent pas très bien comprises, de nombreux candidats confondant convergence de suite et convergence de série).

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3603 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,945 sur 20 (un peu supérieure à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 5,64 (légèrement supérieur à celui de l'année dernière).

• 33% des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (12,5 % ont une note inférieure à 4). Le nombre de copies très faibles (note inférieure à 4) est en très légère augmentation par rapport à l'année dernière.

• 23,5 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12.

• 23,4 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16.

Conclusion :

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées malgré la présence d'un nombre non négligeable de candidats qui ne respectent pas la numérotation des questions, écrivent mal (ce sont souvent les mêmes) et rendent la tâche du correcteur pénible : qu'ils sachent qu'ils n'ont rien à gagner à pratiquer de la sorte, bien au contraire. Plusieurs correcteurs demandent à ce qu'un certain nombre de points soit affecté à la présentation des copies.
Il reste toujours un noyau de candidats qui ne peuvent s'empêcher de faire du remplissage au lieu d'argumenter face aux questions dont le résultat est donné : aucun correcteur n'est dupe, rappelons-le.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.