ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Lundi 7 mai 2012 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \le u_n < 1$.

b) Étudier les variations de la suite (u_n).

c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

2) Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = 1 - u_n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de v_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

c) En déduire que $u_n \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3) a) Écrire une fonction Pascal d'en-tête function $u(n$: integer) : real ; qui renvoie la valeur de u_n.

b) En déduire un programme, rédigé en Pascal, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $1-u_n<10^{-3}$.

Exercice 2

1) Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable (on rappelle que $f^2 = f \circ f$).

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) a) Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

b) Donner une base (u) de $\text{Ker}(g-Id)$.

c) Déterminer $\text{Ker}(g+Id)$.

d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.

3) a) Résoudre l'équation $A^2X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\text{Ker}(g^2+Id)$.

b) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) et conclure.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q=1-p$.

On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q.

On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu "Pile".
- Soit si l'on a obtenu n fois "Face".

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient "Pile" (respectivement "Face") au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1) Loi de T_n.

a) Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k=1$, la probabilité $P(T_n=k)$.

b) Déterminer $P(T_n=n)$.

c) Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} P(T_n=k)=1$.

d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $E(T_n)=\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2) Loi de X_n.

a) Donner la loi de X_n.

b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.

3) Loi de Y_n.

a) Déterminer, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la probabilité $P(Y_n = k)$.

b) Déterminer $P(Y_n = n)$.

c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, puis en déduire $E(Y_n)$.

4) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

5) Simulation informatique.

Compléter les trois instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n à l'exécution de l'instruction " Writeln (t, x, y) ; ".

```
Program EDHEC_2012 ;
   Var   n, t, x, y : integer ;
         p : real ;
Begin
   Randomize ; t : = 0 ; x : = 0 ; y : = 0 ;
   Readln(n) ;
   While (x = 0) and (t < n) do   begin ------ ;
                                    If random > p  then  ------
                                                   else  ------ ;
                                  end ;
Writeln (t, x, y) ;
End.
```

Problème

On désigne par λ un réel strictement positif et on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$$

1) a) Montrer que f est paire.

b) Établir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et donner sa valeur.

c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\,f(x)\,dx$.

b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $E(X)$, et donner sa valeur.

3) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge et donner sa valeur.

b) En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée $V(X)$, et donner sa valeur.

4) On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

b) Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

c) Retrouver alors sans calcul la valeur de $V(X)$.

5) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [0, 1[.

a) On pose $W = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ et on admet que W est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de W et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire W.

b) En déduire une fonction Pascal dont l'en-tête est

function vax(lambda: real) : real ;

qui simule la loi de $|X|$.

c) Vérifier que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.

En déduire une fonction Pascal, utilisant random(2), dont l'en-tête est

function x(lambda : real) : real ;

qui simule la loi de X.

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y. On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un échantillon $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ de la loi de Y. Les variables $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont supposées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on rappelle qu'elles sont indépendantes et de même loi que Y.

6) On considère des réels $x_1, ..., x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$$

a) Exprimer $L(\lambda)$, puis $\ln\big(L(\lambda)\big)$ en fonction de λ, $x_1, ..., x_n$.

b) On considère la fonction φ, définie pour tout réel λ de $]0, +\infty[$, par :

$$\varphi(\lambda) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{k=1}^{n} x_k .$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de $x_1, \ldots, x_n$. Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

7) On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2 : $Z_n = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}$.

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La suite $(Z_n)_{n\geq 2}$ est appelée *estimateur du maximum de vraisemblance* pour λ.

On admet que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ admet pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

a) En remarquant que $\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\,dt = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et que :

$$E(Z_n) = \frac{n}{n-1}\lambda$$

b) Déterminer un estimateur Z_n', fonction simple de Z_n, qui soit un estimateur sans biais de λ.

Corrigé

Exercice 1

1) a) On procède par récurrence.

Pour $n = 0$, comme $u_0 = 0$, on a bien $0 \le u_0 < 1$.

Si l'on suppose pour un entier naturel n fixé que $0 \le u_n < 1$, on a, par stricte croissance de la fonction "carré" sur $\mathbb{R}_+$: $0 \le u_n^2 < 1$. Dès lors, en ajoutant 1 à chaque membre et en divisant par 2, on obtient : $\frac{1}{2} \le u_{n+1} < 1$. Ceci implique bien sûr : $0 \le u_{n+1} < 1$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n < 1}$$

b) Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^{\ 2}+1}{2} - u_n = \dfrac{u_n^{\ 2}+1-2u_n}{2} = \dfrac{(u_n-1)^2}{2}$.

Ceci montre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \ge 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

c) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1), c'est donc une suite convergente. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a, en notant ℓ la limite de la suite (u_n) :

$\ell = \dfrac{\ell^2+1}{2}$, soit $\ell^2 + 1 - 2\ell = 0$, ou encore $(\ell - 1)^2 = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

2) a) Pour tout entier naturel n, on est certain que v_n est non nul (car $u_n < 1$) et on a :

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{1-\frac{u_n^{\ 2}+1}{2}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{2}{1-u_n^{\ 2}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{2-(1+u_n)}{1-u_n^{\ 2}} = \frac{1}{1+u_n}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}}$$

b) D'après la question précédente, on a : $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

D'après le résultat admis, on sait que : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right) = \frac{1}{2}$.

De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right) = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_n} - 1$.

On obtient donc : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_n}-1\right)=\frac{1}{2}$. On peut écrire ceci sous la forme : $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\left(\frac{1}{v_n}-1\right)=1$.

En développant le membre de gauche et en arrangeant un peu, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2/n}{v_n}-\frac{2}{n}\right)=1$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$, on trouve : $\lim_{n\to+\infty}\frac{2/n}{v_n}=1$.

Ceci implique :

$$\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}}$$

c) Par définition de v_n, on en déduit : $1-u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Par définition d'un équivalent, on obtient : $1-u_n \underset{+\infty}{=} \frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})$

On peut alors écrire :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} 1-\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})}$$

3) a) Il suffit de "coller" à la définition de la suite (u_n).

Voici une version récursive :

```
Function u(n : integer) : real ;
   Begin
      If n = 0 then u : = 0 else u : = (sqr(u(n−1)) +1) / 2 ;
   End ;
```

Voici une version itérative :

```
Function u(n : integer) : real ;
Var   k : integer ;
      aux : real ;  {la variable aux contiendra les valeurs prises par u_k au cours de la boucle}
Begin
      aux : = 0 ;
      For k : = 1 to n do aux : = (sqr(aux) + 1) / 2 ;
      u : = aux ;
End ;
```

b) On utilise une boucle "repeat" qui prend fin lorsque $1-u_n<10^{-3}$.

Voici une version récursive :

```
Program Edhec2012 ;
Var n : integer ;
Function u(n : integer) : real ;
   Begin      If n = 0 then u : = 0 else u : = (sqr(u(n−1)) +1) / 2    ;   End ;
BEGIN
   n : = 0 ;
   Repeat n : = n+1 ; until 1 – u(n) < 1/1000 ;
   Writeln (n) ;
END.
```

Et voici une version itérative :

```
Program Edhec2012 ;
Var k, n : integer ; u : real ;
BEGIN
   n : = 0 ; u : = 0 ;
   Repeat n : = n+1 ; u : = (sqr(u) + 1) / 2 ; until 1-u < 1/1000 ;
   Writeln (n) ;
END.
```

Exercice 2

1) Comme f est diagonalisable, il existe, par définition, une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle sa matrice D est diagonale. Dès lors, la matrice de f^2 dans cette base est D^2 qui est aussi diagonale, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f^2 \text{ est diagonalisable}}$$

Remarque. Moins élégamment, on pouvait écrire que, comme f est diagonalisable, alors en désignant par A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que : $A = PDP^{-1}$.

On a alors : $A^2 = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$.

Comme la matrice D^2 est diagonale, on en déduit que A^2 est diagonalisable, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f^2 \text{ est diagonalisable}}$$

2) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Conclusion :

$$\boxed{A^4 = I}$$

Ceci prouve que le polynôme $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A.

Comme on a $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$ et comme $X^2 + 1 > 0$, les racines de ce polynôme sont celles de $X^2 - 1$, à savoir -1 et 1, ce qui montre que :

$$\boxed{\text{Les seules valeurs propres possibles de } A \text{ sont } -1 \text{ et } 1}$$

b) En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 2x-6y+4z=0 \\ 3x-8y+5z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+3L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ -2y+2z=0 \\ -2y+2z=0 \end{cases}.$$

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $u = (1,1,1)$ n'est pas nul donc la famille $\big((1,1,1)\big)$ est libre et, comme elle engendre le sous-espace propre de g associé à la valeur propre 1, c'est une base de ce sous-espace propre.
Conclusion :

$$\boxed{\big((1,1,1)\big) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(g - Id)}$$

c) Avec le même genre de technique, on a :

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-4y+4z=0 \\ 3x-8y+7z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -8y+6z=0 \\ -14y+10z=0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} -8y+6z=0 \\ -14y+10z=0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow 4L_2-7L_{11}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -8y+6z=0 \\ -2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$. On obtient donc :

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y=z=0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g + Id) = \{(0, 0, 0)\}}$$

d) L'étude précédente montre que –1 n'est pas valeur propre de g et que 1 est valeur propre de g. Comme –1 et 1 sont les deux valeurs propres possibles de g, on en déduit que 1 est la seule valeur propre de g.
Comme la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est différente de 3 (elle est égale à 1), on peut conclure :

$$\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

3) a) $A^2X = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+2z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-y+z=0.$

On trouve donc : $A^2X = -X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

On en déduit que Ker($g^2 + Id$) est engendré par la famille $\big((1,0,-1),(0,1,1)\big)$. Comme cette famille est libre car composée de deux vecteurs non proportionnels, c'est une base de Ker($g^2 + Id$).

En posant $v = (1,0,-1)$ et $w = (0,1,1)$, on en conclut que :

$$\boxed{(v,w) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(g^2 + Id)}$$

Remarque. On aurait pu faire un autre choix en écrivant :

$A^2X = -X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ceci donnait la famille $\big((1,1,0),(-1,0,1)\big)$ comme base de Ker($g^2 + Id$).

b) Montrons que (u, v, w) est une famille libre.
Soit donc a, b et c trois réels tels que $a\,u + b\,v + c\,w = 0$. En remplaçant u, v et w par $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$ et $(0,1,1)$, on trouve : $(a+b,\ a+c,\ a-b+c) = (0,0,0)$.

On obtient alors le système équivalent : $\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$. Avec la transformation $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$,

on a : $\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ -b=0 \end{cases}$. On obtient ensuite : $b = 0$, puis $a = 0$ et enfin $c = 0$.

La famille (u, v, w) est libre. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et comme la famille (u, v, w) contient 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on peut conclure :

$$\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

c) • On a : $g^2(u) = g\big(g(u)\big) = g(u) = u$, puisque u appartient à Ker($g - Id$).

• On sait depuis la question 3a) que v et w appartiennent à Ker($g^2 + Id$) donc : $g^2(v) = -v$ et $g^2(w) = -w$.

La matrice de g^2 dans la base (u, v, w) est donc :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Comme la matrice B est diagonale, on a la preuve que g^2 est diagonalisable (alors que g ne l'est pas).

Remarque. Pour trouver $g^2(u)$, $g^2(v)$ et $g^2(w)$, on pouvait effectuer les calculs matriciels suivants :

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc : $g^2(u) = u$.

$$A^2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\text{ donc : } g^2(v)=-v.$$

$$A^2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\text{ donc : } g^2(w)=-w.$$

Exercice 3

1) Notons tout d'abord que $T_n(\Omega)=[\![1,n]\!]$, puisque l'on peut obtenir un "Pile" dès le premier lancer ou bien être obligé de lancer la pièce n fois, toutes les situations intermédiaires étant envisageables.

a) L'événement $(T_n=1)$ est réalisé si et seulement si l'on obtient "Pile" au premier lancer. On a donc : $P(T_n=1)=p$.

Pour tout k appartenant à $[\![2,\ n-1]\!]$, $(T_n=k)$ est réalisé si et seulement si on a obtenu "Face" $k-1$ fois et "Pile" au k ème lancer. On a donc :

$$(T_n=k)=\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}F_i\right)\cap P_k$$

On en déduit : $P(T_n=k)=P(F_1)P_{F_1}(F_2)\ldots P_{F_1\cap\ldots\cap F_{k-2}}(F_{k-1})P_{F_1\cap\ldots\cap F_{k-1}}(P_k)$

Tant que l'on obtient "face", on relance la pièce dans les mêmes conditions donc :

$$\forall k\in[\![2,\ n-1]\!],\ P(T_n=k)\ =\ q^{k-1}p$$

Cette formule étant valable pour $k = 1$ (elle donne bien $P(T_n=1)=p$), on conclut :

$$\boxed{\forall k\in[\![1,\ n-1]\!],\ P(T_n=k)\ =\ q^{k-1}p}$$

b) L'événement $(T_n=n)$ est réalisé si, et seulement si, on obtient $n-1$ "Faces" durant les n premiers lancers (peu importe ce que donne le $n^{\text{ème}}$ lancer, il aura lieu).

On a donc : $(T_n=n)=\bigcap_{i=1}^{n-1}F_i$. Comme dans la question 1a), on obtient :

$$\boxed{P(T_n=n)\ =\ q^{n-1}}$$

Remarque. On trouvait le même résultat en écrivant, moins synthétiquement :

$$(T_n=n)=\left(\bigcap_{i=1}^{n}F_i\right)\cup\left(\left[\bigcap_{i=1}^{n-1}F_i\right]\cap P_n\right)$$

c) On a : $\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)=\sum_{k=1}^{n-1}P(T_n=k)+P(T_n=n)$. On en déduit :

$\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)=\sum_{k=1}^{n-1}q^{k-1}p+q^{n-1}=p\sum_{i=0}^{n-2}q^i+q^{n-1}$. Comme q est différent de 1, on obtient :

$\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)=p\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}+q^{n-1}=1-q^{n-1}+q^{n-1}$.

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1}$$

d) La variable aléatoire T_n est finie donc elle possède une espérance et on a :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} p + n\, q^{n-1} = p \sum_{k=1}^{n-1} k\, q^{k-1} + n\, q^{n-1}$$

Première méthode. Considérons la fonction f définie sur]0, 1[par :

$$f(q) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

La fonction f est dérivable (fonction polynomiale) et on a : $f'(q) = \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}$ (le terme correspondant à $k = 0$ dans $f(q)$ a une dérivée nulle car il vaut 1).

Comme $f(q) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$, on a aussi : $(1-q)f(q) = 1-q^n$.

En dérivant les deux membres, on obtient : $(1-q)f'(q) - f(q) = -nq^{n-1}$.

On déduit : $(1-q)f'(q) = f(q) - nq^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q} - nq^{n-1} = \dfrac{1+(n-1)q^n - nq^{n-1}}{1-q}$.

En divisant par $1-q$, on trouve : $f'(q) = \dfrac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1-q)^2}$.

On en déduit : $\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} = \dfrac{(n-1)\, q^n - n\, q^{n-1} + 1}{(1-q)^2}$.

On a alors successivement :

$$E(T_n) = p\,\frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1-q)^2} + nq^{n-1} = (1-q)\frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1-q)^2} + nq^{n-1}.$$

$$E(T_n) = \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{1-q} + nq^{n-1} = \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1 + nq^{n-1}(1-q)}{1-q}.$$

$$E(T_n) = \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1 + nq^{n-1} - nq^n}{1-q} = \frac{nq^n - q^n - nq^{n-1} + 1 + nq^{n-1} - nq^n}{1-q}.$$

On trouve bien :

$$\boxed{E(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Deuxième méthode. On écrit :

$$E(T_n) = (1-q)\sum_{k=1}^{n-1} k\, q^{k-1} + n\, q^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k\, q^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k\, q^k + n\, q^{n-1}$$

Avec le changement d'indice $i = k-1$ dans la première somme, on obtient :

$$E(T_n) = \sum_{i=0}^{n-2} (i+1)\, q^i - \sum_{k=1}^{n-1} k\, q^k + n\, q^{n-1}$$

En scindant la première somme, on a : $E(T_n) = \sum_{i=0}^{n-2} i\, q^i + \sum_{i=0}^{n-2} q^i - \sum_{k=1}^{n-1} k\, q^k + n\, q^{n-1}$.

Les première et troisième sommes se simplifient et il reste :

$$E(T_n)=\sum_{i=0}^{n-2}q^i-(n-1)q^{n-1}+n\,q^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-2}q^i+q^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}q^i=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

2) a) Notons que $X_n(\Omega)=\{0,1\}$, puisque lors des n premiers lancers, soit on ne fait que des "Faces" et $(X_n=0)$ est réalisé, soit on obtient un "Pile", ce qui arrête le jeu, et $(X_n=1)$ est réalisé. On a $(X_n=0)=\bigcap_{i=1}^{n}F_i$ et, avec encore le même argument que dans la question 1a), on obtient : $P(X_n=0)=q^n$.

On en déduit : $P(X_n=1)=1-q^n$.

$$\boxed{X_n \text{ suit la loi } \mathcal{B}(1-q^n)}$$

b) D'après le cours, X_n a une espérance et :

$$\boxed{E(X_n)=1-q^n}$$

3) On a $Y_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$, puisque l'on peut, au mieux, obtenir un "Pile" dès le premier lancer et Y_n prend la valeur 0, ou, au pire, n'obtenir que des "Faces" et Y_n prend la valeur n, toutes les situations intermédiaires étant, ici aussi, envisageables.

a) • L'événement $(Y_n=0)$ est réalisé si, et seulement si, on n'obtient aucun "Face", c'est-à-dire si, et seulement si, on obtient "Pile" au premier lancer. On a donc : $P(Y_n=0)=p$.

• Pour tout k de $[\![1,\,n-1]\!]$, l'événement $(Y_n=k)$ est réalisé si, et seulement si, on obtient k "Faces" lors des k premiers lancers, suivis d'un "Pile" pour garantir que l'on a obtenu k "Faces", **et pas plus**. On a donc : $(Y_n=k)=\left(\bigcap_{i=1}^{k}F_i\right)\cap P_{k+1}$.

Toujours comme dans la question 1a), on obtient : $P(Y_n=k)=q^k p$. Comme cette égalité donne bien $P(Y_n=0)=p$ pour $k=0$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall k\in[\![0,\,n-1]\!],\ P(Y_n=k)=q^k p}$$

b) L'événement $(Y_n=n)$ est réalisé si, et seulement si, on obtient n "Faces" lors des n premiers lancers. On a donc : $(Y_n=n)=\bigcap_{i=1}^{n}F_i$. De la même façon encore (tant que l'on obtient "face", on relance la pièce dans les mêmes conditions), on obtient :

$$\boxed{P(Y_n=n)=q^n}$$

c) Le nombre total de lancers est égal au nombre de "Pile" ajouté au nombre de "Face". Par conséquent, on a :

$$\boxed{X_n+Y_n=T_n}$$

Par linéarité de l'espérance, on trouve : $E(X_n)+E(Y_n)=E(T_n)$.

On a donc : $E(Y_n)=E(T_n)-E(X_n)=\dfrac{1-q^n}{1-q}-(1-q^n)=\dfrac{1-q^n-(1-q^n)(1-q)}{1-q}$

Pour finir, on trouve :

$$\boxed{E(Y_n)=\frac{q(1-q^n)}{1-q}}$$

4) D'après la question 1a), on a, pour tout k fixé dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel n strictement supérieur à k : $P(T_n=k)\ =\ q^{k-1}p$.

On peut faire tendre n vers $+\infty$ et on trouve :

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{n\to+\infty}P(T_n=k)\ =\ \lim\limits_{n\to+\infty}q^{k-1}p=\ q^{k-1}p.$

En conclusion, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T suivant la loi géométrique de paramètre p.

5) Tant que l'on n'a pas obtenu de "Pile" et que l'on n'a pas lancé la pièce n fois, on rejoue et la variable T_n augmente d'une unité. À chaque nouveau lancer, si l'on obtient un "Face", Y_n augmente d'une unité, sinon c'est X_n qui augmente d'une unité et prend définitivement la valeur 1.

```
Program EDHEC2012 ;
   Var   n, t, x, y : integer ;
         p : real ;
Begin
   Randomize ; t : = 0 ; x : = 0 ; y : = 0 ; Readln(n, p) ;
   While (x = 0) and (t < n) do   begin t : = t+1
                                  If random > p then  y : = y+1    else   x : = 1 ;
                                  End ;
   Writeln (t, x, y) ;
End.
```

Remarque. La dernière instruction "x : = 1 ;" peut être remplacée par "x : = x + 1 ;", ce qui revient au même.

Problème

1) a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0.

De plus : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=\lambda\left|-x\right|e^{-\lambda(-x)^2}=\lambda\left|x\right|e^{-\lambda x^2}=f(x)$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire}}$$

b) Pour tout réel x positif, on a $f(x)=\lambda x\,e^{-\lambda x^2}$, ce qui montre que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout réel A positif, on a : $\int_0^A f(x)\,dx=\int_0^A\lambda x\,e^{-\lambda x^2}\,dx=-\dfrac{1}{2}\left[e^{-\lambda x^2}\right]_0^A=-\dfrac{1}{2}\left(e^{-\lambda A^2}-1\right).$

Comme λ est strictement positif, on a : $\lim_{A\to+\infty} e^{-\lambda A^2} = 0$. Ceci prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}}$$

c) La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction *f* est positive ($\lambda > 0$, $|x| \geq 0$ et $e^{-\lambda x^2} > 0$).
De plus, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et *f* est paire donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge également et on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire } X}$$

2) a) Pour tout réel x positif, on a $x\,f(x) = \lambda x^2\, e^{-\lambda x^2}$, ce qui montre que la fonction $x \mapsto x\,f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (produit de fonctions continues).
De plus, on a : $\forall x > 0,\ x^2\big(x\,f(x)\big) = \lambda x^4\, e^{-\lambda x^2} = \frac{1}{\lambda}\lambda^2 x^4\, e^{-\lambda x^2} = \frac{1}{\lambda}(\lambda x^2)^2\, e^{-\lambda x^2}$.
$\lim_{x\to+\infty} (\lambda x^2)^2\, e^{-\lambda x^2} = \lim_{z\to+\infty} z^2 e^{-z} = 0$ (par croissances comparées et parce que $\lambda > 0$) donc :
$\lim_{x\to+\infty} x^2\big(x\,f(x)\big) = 0$. Ceci prouve que : $x\,f(x) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$.
On sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (intégrale de Riemann de paramètre 2 > 1) donc, grâce au critère de négligeabilité (pour les intégrales de fonctions continues et positives), l'intégrale $\int_1^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ converge également. Comme l'intégrale $\int_0^1 x\,f(x)\,dx$ est définie (intégrale d'une fonction continue sur un segment), on peut conclure :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} x\,f(x)\,dx \text{ converge}}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = -x\,f(-x) = -\lambda\, x\left|-x\right| e^{-\lambda(-x)^2} = -\lambda\, x\left|x\right| e^{-\lambda x^2} = -x\,f(x) = -g(x)$.
La fonction $g : x \mapsto x\,f(x)$ est donc impaire, et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ converge, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)\,dx$ converge également.
La relation de Chasles prouve que $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ est convergente et que $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = 0$.
En conclusion, *X* possède une espérance et :

$$\boxed{E(X) = 0}$$

3) a) Pour tout réel x positif, on a $x^2 f(x) = \lambda x^3 e^{-\lambda x^2}$, ce qui montre que la fonction $h : x \mapsto x^2 f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout réel A positif, on a : $\int_0^A x^2 f(x)\,dx = \int_0^A x^2 \times \lambda x e^{-\lambda x^2}\,dx$.

On pose $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \lambda x e^{-\lambda x^2}$.

On a donc $u'(x) = 2x$ et on peut choisir $v(x) = -\frac{1}{2} e^{-\lambda x^2}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc l'intégration par parties est licite et donne :

$\int_0^A x^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[x^2 e^{-\lambda x^2}\right]_0^A + \int_0^A x e^{-\lambda x^2}\,dx = -\frac{1}{2} A^2 e^{-\lambda A^2} + \frac{1}{\lambda}\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x^2}\,dx$.

$\int_0^A x^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{2} A^2 e^{-\lambda A^2} + \frac{1}{\lambda}\int_0^A f(x)\,dx$.

Comme $\lambda > 0$, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} A^2 e^{-\lambda A^2} = 0$, par croissances comparées, comme à la question 2a).

De plus, $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ est convergente, et, après passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2\lambda}}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = (-x)^2 f(-x) = \lambda x^2 \left| -x \right| e^{-\lambda(-x)^2} = \lambda x^2 \left| x \right| e^{-\lambda x^2} = x^2 f(x) = h(x)$.

La fonction $h : x \mapsto x^2 f(x)$ est donc paire, et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^0 x^2 f(x)\,dx$ converge également.

La relation de Chasles prouve que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ est convergente, ce qui signifie que X possède un moment d'ordre 2.

Comme h est paire, on a de plus : $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}$.

Pour finir : $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{1}{\lambda} - 0$.

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

4) a) Comme $Y = X^2$, on a $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, ce qui montre que : $\forall x < 0$, $F_Y(x) = 0$.

Pour tout réel x positif ou nul, on a : $F_Y(x) = P(Y \le x) = P(X^2 \le x) = P(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x})$.

En notant F_X la fonction de répartition de X, on obtient :

$$\boxed{F_Y(x)=\begin{cases}F_X(\sqrt{x})-F_X(-\sqrt{x}) \text{ si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}}$$

b) Première méthode.

On déduit de ce qui précède que :

$\forall x\geq 0$, $F_Y(x)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)\,dt=2\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,dt$, cette dernière égalité provenant de la parité de *f*.

En remplaçant, on trouve : $\forall x\geq 0$, $F_Y(x)=2\int_0^{\sqrt{x}} \lambda t\, e^{-\lambda t^2}\,dt=\Big[-e^{-\lambda t^2}\Big]_0^{\sqrt{x}}=1-e^{-\lambda x}$.

Pour résumer : $F_Y(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} \text{ si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$. On reconnaît que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Comme l'énoncé le demande, on obtient une densité f_Y de Y en dérivant (sauf en 0) la fonction F_Y et en posant, par exemple, $f_Y(0)=\lambda$, ce qui donne :

$$f_Y(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$$

Deuxième méthode.

La fonction F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction racine carrée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition et soustraction, F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme F_Y coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, elle est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$.

On obtient alors une densité f_Y de Y en dérivant F_Y, sauf en 0, puis en donnant une valeur arbitraire positive à f_Y en 0. On a : $F_Y{}'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x})+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f(-\sqrt{x}) \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$.

Comme *f* est paire, il reste : $F_Y{}'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x}) \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$.

En remplaçant, on trouve : $F_Y{}'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\lambda\left|\sqrt{x}\right|e^{-\lambda x} \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$

En simplifiant (car $\left|\sqrt{x}\right|=\sqrt{x}$), on a enfin : $F_Y{}'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$.

Il suffit de poser $f_Y(0)=\lambda$ pour obtenir :

$$\boxed{f_Y(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}}$$

On conclut que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

c) D'après le cours, on sait que $E(Y)=\frac{1}{\lambda}$, et comme $Y=X^2$, on a $E(X^2)=\frac{1}{\lambda}$. Comme $E(X)=0$, on retrouve alors :

$$\boxed{V(X)=\frac{1}{\lambda}}$$

5) a) En notant F_W et F_U les fonctions de répartition de *W* et *U*, on a, pour tout réel *x* :

$F_W(x)=P(W\le x)=P(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)\le x)=P(\ln(1-U)\ge -\lambda x)=P(1-U\ge e^{-\lambda x})$.

La dernière égalité provient du fait que la fonction exponentielle est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0,+\infty[$.

On a donc : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_W(x)=P(U\le 1-e^{-\lambda x})=F_U(1-e^{-\lambda x})$.

La fonction exponentielle est à valeurs dans $]0,+\infty[$ donc : $1-e^{-\lambda x}<1$.

- Si $x\ge 0$, alors, comme $\lambda>0$, on a : $e^{-\lambda x}\le 1$ et $1-e^{-\lambda x}\ge 0$.

On en déduit que : $0\le 1-e^{-\lambda x}<1$. On peut alors remplacer et obtenir : $F_W(x)=1-e^{-\lambda x}$.

- Si $x<0$, alors, comme $\lambda>0$, on a : $e^{-\lambda x}>1$ et $1-e^{-\lambda x}<0$. On en déduit que : $F_W(x)=0$.

On a donc le résultat :

$$\boxed{W\text{ suit la loi exponentielle de paramètre }\lambda}$$

b) On sait que $Y=X^2$ donc on a : $|X|=\sqrt{Y}$. Comme la loi de *Y* est la même que celle de *W* (que l'on sait simuler d'après la question précédente), on peut maintenant écrire la fonction simulant la loi de $|X|$:

```
function vax(lambda : real) : real ;
var y : real ;
Begin
y : = (–1/lambda) * ln(1 – random) ;
vax : = sqrt(y) ;
End ;
```

c) On a vu à la question 1b) que : $P(X\ge 0)=\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

Par parité de *f*, on sait aussi que $P(X\le 0)=\int_{-\infty}^{0}f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

On a donc :

$$\boxed{P(X\ge 0)=P(X\le 0)}$$

Ce qui précède s'écrit aussi : $P(X=|X|)=P(X=-|X|)=\frac{1}{2}$. Pour simuler *X*, il suffit donc de simuler $|X|$, puis de traduire le fait qu'il y a une chance sur 2 que ce que l'on a simulé soit *X* (ou –*X*).

```
function x(lambda: real) : real ;
var y : real ;
Begin
```

```
y : = (–1/lambda) * ln(1 – random) ;
If random(2) = 1 then   x : = sqrt(y)    else   x : = –sqrt(y) ;
End ;
```

6) a) On a : $\forall x \in]0,+\infty[$, $L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k) = \prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_k}$.

Grâce aux propriétés de la fonction exponentielle, on trouve :
$L(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} ... \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+...+x_n)}$, ce qui donne :

$$\boxed{L(\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\ln\left(L(\lambda)\right) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k}$$

b) On a : $\varphi(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k$.

La fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et : $\varphi'(\lambda) = \dfrac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{n - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k}{\lambda}$.

On a donc : $\varphi'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow n - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} x_k}$ (aucun risque à écrire ceci puisque les x_k sont supposés strictement positifs).

On conclut :

$$\boxed{\varphi \text{ admet un maximum, atteint en } z = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} x_k}}$$

D'après ce qui précède, z est le réel en lequel la fonction $\ln L$ atteint son maximum. Comme $(\ln L)' = \dfrac{L'}{L}$ et comme L est une fonction positive, $(\ln L)'$ et L' ont même signe. Par conséquent, $\ln L$ et L ont les mêmes variations, ce qui prouve que:

$$\boxed{z \text{ est le réel en lequel la fonction } L \text{ atteint son maximum}}$$

7) a) Comme $Z_n = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}$, comme $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ a pour densité f_n, et comme $t \mapsto \dfrac{n}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, alors, grâce au théorème de transfert, Z_n possède une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{n}{t} f_n(t)\,dt$ converge (puisque Z_n ne prend que des valeurs positives).

Pour tout réel t positif, on a :

$$\frac{n}{t}f_n(t)=\frac{n}{t}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}=n\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-2}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\frac{\lambda n}{n-1}\times\frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}t^{n-2}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\frac{\lambda n}{n-1}f_{n-1}(t).$$

Comme n est supérieur ou égal à 2, la fonction f_{n-1} est une densité donc $\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\,dt=1$.

Ceci prouve que $\int_0^{+\infty}\frac{n}{t}f_n(t)\,dt$ converge et l'on a de plus : $\int_0^{+\infty}\frac{n}{t}f_n(t)\,dt=\frac{\lambda n}{n-1}\times 1$.

On a bien :

$$\boxed{E(Z_n)=\frac{n}{n-1}\lambda}$$

b) En posant $Z_n'=\frac{n-1}{n}Z_n$, on a, par linéarité de l'espérance :

$E(Z_n')=\frac{n-1}{n}E(Z_n)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n-1}\lambda=\lambda$.

$$\boxed{Z_n'=\frac{n-1}{n}Z_n \text{ est un estimateur sans biais de } \lambda}$$

EDHEC 2012

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option économique

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
Le sujet balayait largement le programme en donnant une place importante aux probabilités (troisième exercice et problème comme l'année dernière).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme. Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé ce sujet équilibré, plus long, plus sélectif et, peut-être, plus déstabilisant que par le passé du fait de questions ouvertes pour lesquelles il était impossible de deviner la solution. Il a permis de bien apprécier les connaissances et les capacités à raisonner des candidats, ce qui est le premier but d'un texte de concours.

• **L'exercice 1** proposait l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **,** définie par la donnée de u_0 = 0 et par la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$. La dernière question consistait à trouver un développement asymptotique de u_n.

Cet exercice a révélé les failles de certains candidats, notamment en ce qui concerne les mécanismes usuels de calcul (identités remarquables non reconnues), ce qui est relativement grave, et les notions "fines" d'analyse (définition de deux suites équivalentes, d'une suite négligeable devant une autre), ce qui est plus normal.

• **L'exercice 2** étudiait un endomorphisme *g* de $\mathbb{R}^3$ afin d'établir que si g^2 est diagonalisable, il n'en est pas nécessairement de même pour *g*.

Cet exercice montre que les notions de noyau et d'image restent floues pour un nombre significatif de candidats. La différence entre famille génératrice et base est, elle aussi, peu claire chez nombre de candidats.

• **L'exercice 3,** portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif d'étudier une suite de *n* épreuves aléatoires, chacune consistant à lancer une pièce donnant "pile" avec la probabilité *p*, les lancers s'arrêtant dès l'obtention d'un "pile" ou bien si les *n* lancers avaient donné "face".
On étudiait plus particulièrement les variables aléatoires T_n (nombre de lancers effectués), X_n (nombre de "Pile" obtenus) et enfin Y_n (nombre de "Face" obtenus). Une simulation informatique des variables T_n, X_n et Y_n était, proposée en fin d'exercice.
Ce type d'exercice permet de distinguer les candidats qui réfléchissent : il a permis aux meilleurs de faire la différence, notamment car certaines questions étaient ouvertes et qu'il fallait vraiment réfléchir pour trouver le résultat.

• **Le problème**, portant aussi sur le programme de probabilités, mais sur la partie "variables à densité", avait pour but de déterminer espérance et variance d'une variable aléatoire *X* de densité *f* donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$.

La suite proposait de montrer que la variable $Y = X^2$ suivait la loi exponentielle de paramètre λ et d'en déduire une simulation informatique de la loi de $|X|$. La fin de ce problème proposait d'estimer, par la méthode du maximum de vraisemblance, le paramètre λ en s'appuyant sur un échantillon de la loi de *Y*.

Le problème a été abordé avec des fortunes diverses, certains candidats n'ayant visiblement aucune connaissance sur cette partie du programme de seconde année. Dans l'ensemble, il a été plutôt bien réussi par ceux qui ont eu le temps (ou la présence d'esprit) de s'y intéresser.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3131 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 9,857 sur 20 (inférieure de 0,5 point à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 5,83 (identique à celui de l'année dernière).

• 42 % des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (dont 18,5 % ont une note inférieure à 4). Le nombre de copies très faibles (note inférieure à 4) est en augmentation de 3,5 % par rapport à l'année dernière.

• 22 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12.

• 19 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16.

Conclusion :

Le niveau moyen est moins élevé que l'année dernière et provient d'un nombre plus important de copies très faibles (250 copies ont moins de 2 sur 20). Ceci s'explique en partie par le fait que l'épreuve était un peu plus exigeante que par le passé, mais surtout par le fait que, par exemple, un nombre considérable de candidats ne reconnaissent pas une identité remarquable pourtant célèbre ($u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1$) pour obtenir les variations de la suite (u_n), un nombre non négligeable confondent famille génératrice et base, inversibilité et diagonalisabilité, et beaucoup font des fautes de calcul (souvent par manque de concentration) qui perturbent gravement le déroulement du raisonnement et empêchent de trouver le bon résultat voire obligent à tricher pour le trouver !

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées malgré la présence d'un nombre assez élevé de candidats qui ne respectent pas la numérotation des questions, écrivent mal (ce sont souvent les mêmes) et rendent la tâche du correcteur pénible : qu'ils sachent qu'ils n'ont rien à gagner à pratiquer de la sorte, bien au contraire. Plusieurs correcteurs demandent à ce qu'un certain nombre de points soit affecté à la présentation des copies.

Il reste toujours un noyau de candidats qui ne peuvent s'empêcher de faire du remplissage au lieu d'argumenter face aux questions dont le résultat est donné : aucun correcteur n'est dupe, rappelons-le.

Précisons pour les futurs candidats qu'ils ne sont pas obligés de recopier les énoncés des questions avant de les traiter et qu'ils ne sont pas, non plus, obligés de recopier tout un programme d'informatique si la question posée était seulement de compléter quelques instructions manquantes.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.