Marc-Antoine,
étudiant en pré-Master
BIENVENUE DANS NOS RESEAUX D'ENERGIE
Avec 250 entreprises partenaires, 27 000 anciens diplômés présents dans 121 pays, un maillage unique de professeurs, d'associations, et d'ambassadeurs, le réseau de l'EDHEC est une véritable force sur laquelle vous pourrez compter tout au long de votre cursus et de votre carrière. Venez vous inscrire dans une dimension résolument internationale et découvrir un nouveau monde, celui des réseaux et de l'excellence, qui vous ouvrira d'innombrable portes.
www.edhec-ge.com
EDHEC BUSINESS SCHOOL

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

6 mai 2014 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On rappelle que la fonction Γ (gamma) est la fonction, qui à tout réel x strictement positif, associe $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$. On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1) On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite.
On pose $U = X^2$ et $V = Y^2$.

a) Montrer que la loi commune à U et V est la loi $\Gamma(2, \dfrac{1}{2})$.

b) Donner l'espérance et la variance de U et V.

2) On pose $W = U + V$ et on rappelle que W est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner sans calcul la loi de W ainsi que son espérance et sa variance.

b) On admet que, si f_U et f_V sont respectivement des densités de U et V, alors, une densité de W est la fonction f_W, nulle sur $]-\infty, 0[$, et définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\, dt$.

Justifier, sans calculer l'intégrale précédente, que :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_W(x) = \int_0^x f_U(t) f_V(x-t)\, dt$$

c) Pour tout réel x strictement positif, on pose $I(x) = \int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\, dt$.

Déduire des questions précédentes que l'intégrale $I(x)$ converge et donner sa valeur.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

On admet que l'application trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que f n'est pas l'endomorphisme nul (on pourra distinguer les cas $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$).
3) a) Établir que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $(f \circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A)\ f(M)$.
   b) Donner les valeurs propres possibles de f.
4) Montrer que 0 est valeur propre de f.
5) Montrer que, si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable.
6) On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.
   a) Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$?
   b) Conclure que f est diagonalisable.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de donner la valeur (par deux méthodes différentes) de :

$$\Delta = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$$

Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3 et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux polynômes 1 et X.

1) a) Rappeler pourquoi, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge.
   b) Montrer que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P,Q) d'éléments de E, associe $\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$ est un produit scalaire sur E, dont la norme associée sera notée $\|\ \|$.
2) Soit Q un polynôme de F défini par $Q = xX + y$, où x et y sont deux réels. Donner, sous forme d'intégrale, l'expression de $\| X^3 - Q\|^2$.
3) a) Énoncer le théorème qui assure l'existence et l'unicité du polynôme Q_0 de F qui rend $\| X^3 - Q\|^2$ minimale.
   b) En déduire sans calcul les valeurs de $\langle X^3 - Q_0, 1\rangle$ et $\langle X^3 - Q_0, X\rangle$.
   c) En notant $Q_0 = x_0X + y_0$, écrire le système que doit vérifier le couple (x_0, y_0) pour que $\int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$ soit minimale.
   d) Déterminer la valeur de Δ.

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y) = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$$

4) Écrire $f(x,y)$ comme une fonction polynomiale des deux variables x et y.
5) Déterminer le seul point critique (x_0, y_0) de f sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
6) Montrer que f admet en (x_0, y_0) un minimum local m que l'on calculera.
7) Établir que ce minimum est global.

Problème

Question préliminaire

1) Soit x un réel quelconque.

   a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x,t)dt$.

   b) Montrer que : $y = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \le 0 \\ \frac{x^2+1}{2} \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \text{ si } x \ge 1 \end{cases}$.

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, en posant, pour tout ω de Ω :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega),t)dt$$

On se propose dans les deux parties suivantes de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

Partie 1 : étude de plusieurs cas où X est discrète

2) Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.

3) On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{4}$$

   a) Déterminer la valeur de $P(X=0)$.

   b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

   c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
Var u : integer ;
Begin
u : = random(4) ;
If ------ then ------ else y : = ------ ;
End ;
```

4) On suppose, dans cette question, que X suit la loi de Poisson de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).

   a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*$ puis donner la loi de Y.

   b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

Partie 2 : étude de plusieurs cas où X est à densité

On note, sauf indication contraire, respectivement F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y.

5) On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0,1[$, avec $X(\Omega) = [0,1[$.

   a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \frac{X^2+1}{2}$.

   b) En déduire $Y(\Omega)$.

   c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2},1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.

   d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.

e) Donner la valeur de $E(Y)$.

f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
Begin  y : = ------ ;  End ;
```

6) On suppose, dans cette question, que $X-1$ suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).

a) Toujours en utilisant la première question, exprimer Y en fonction de X.

b) Donner sans calcul l'espérance et la variance de Y.

c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Vérifier que la variable aléatoire $W=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ, puis compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y(lambda : real) : real ;
Begin y : = ------ ;
End ;
```

7) On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega)=\mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

a) Vérifier que $Y(\Omega)=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

b) Donner la valeur de $P\left(Y=\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left([X\leq 0],[0<X\leq 1],[X>1]\right)$ pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<\dfrac{1}{2}\\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) \text{ si } \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\\ \Phi(x) \text{ si } x>1\end{cases}$$

d) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

e) Soit $U_1,\ldots,U_{48}$ des variables indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. Expliquer pourquoi on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{48}U_k-24\right)$ par la loi normale centrée réduite, puis compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule Y.

```
Function y(lambda : real) : real ;
Var k : integer ;  aux : real ;
Begin
aux : = 0 ;
For k : = 1 to 48 do aux : = aux + random ;
x : = (aux−24)/2 ;
If ------  then  y : = ------  else
                        If  ------ then  y : = ------  else  y : = ------ ;
End ;
```

Corrigé

Exercice 1 ....

1) a) Il est évident que U et V suivent la même loi.
On a $U(\Omega)=\mathbb{R}_+$ donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ F_U(x)=0}$$

De plus, pour tout réel x positif, on a :

$$F_U(x)=P(U\le x)=P(X^2\le x)=P\left(-\sqrt{x}\le X\le \sqrt{x}\right)=\Phi\left(\sqrt{x}\right)-\Phi\left(-\sqrt{x}\right)$$

Comme $\Phi\left(-\sqrt{x}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{x}\right)$, on trouve :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_U(x)=2\Phi\left(\sqrt{x}\right)-1}$$

On dérive F_U sauf en 0 :

$$F_U{}'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\varphi\left(\sqrt{x}\right) \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$$

En remplaçant l'expression de $\varphi\left(\sqrt{x}\right)$ et en posant par exemple $f_U(0)=0$, on obtient une densité f_U de U :

$$f_U(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x\le 0\end{cases}$$

On a donc :

$$f_U(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\times 2^{\frac{1}{2}}} \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x\le 0\end{cases}$$

On reconnaît que :

$$\boxed{\text{La loi commune à } U \text{ et } V \text{ est la loi } \Gamma(2, \tfrac{1}{2})}$$

b) D'après le cours sur la loi gamma, on a :

$$\boxed{E(U)=E(V)=1 \text{ et } \mathrm{Var}(U)=\mathrm{Var}(V)=2}$$

2) a) Comme $W=U+V$ et comme U et V sont indépendantes (puisque X et Y le sont) la stabilité de la loi gamma par l'addition permet d'affirmer que W suit la loi $\Gamma(2, 1)$, c'est-à-dire la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Par conséquent :

$$\boxed{E(W)=2\,,\ \mathrm{Var}(W)=4}$$

b) Comme U et V prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et sont indépendantes, on a :

$$W(\Omega)=\mathbb{R}_+$$

Ceci montre déjà (l'énoncé en faisait d'ailleurs cadeau) que : $\forall x\in\mathbb{R}_-^*\,,\ f_W(x)=0$.
D'après le rappel donné par l'énoncé, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\,,\ f_W(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\,f_V(x-t)\,dt$$

Cherchons sur quel intervalle la fonction intégrée est non nulle :

$$\big(f_U(t)\,f_V(x-t)\neq 0\big)\Leftrightarrow\big(f_U(t)\neq 0 \text{ et } f_V(x-t)\neq 0\big)$$

Par conséquent :

$$\big(f_U(t)\,f_V(x-t)\neq 0\big)\Leftrightarrow\big(t>0 \text{ et } x-t>0\big)\Leftrightarrow\big(t>0 \text{ et } t<x\big)\Leftrightarrow\big(0<t<x\big)$$

Il reste donc :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+\,,\ f_W(x)=\int_0^x f_U(t)\,f_V(x-t)\,dt}$$

c) On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\,,\ \forall t\in\,]0,x[\,,\ f_U(t)\,f_V(x-t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi(x-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-t)}{2}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{t(x-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

On en déduit : $\forall x\in\mathbb{R}_+\,,\ f_W(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{2\pi\sqrt{t(x-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}dt=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}dt$.

On a donc : $I(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}dt=2\pi\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}f_W(x)$.

Pour finir, comme W suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$, on a :

$$f_W(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

On en déduit : $I(x)=2\pi\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\times\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
Bilan :

$$\boxed{I(x)=\pi}$$

Exercice 2 ....

1) Pour commencer, comme A et M sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M)$ est aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que combinaison linéaire de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si λ est un réel, on a :
$f(M+\lambda N)=\mathrm{Tr}(A)(M+\lambda N)-\mathrm{Tr}(M+\lambda N)A$. Par linéarité de la trace et grâce aux propriétés du produit d'une matrice par un réel, on obtient successivement :

$f(M+\lambda N)=\mathrm{Tr}(A)M+\lambda\mathrm{Tr}(A)N-\mathrm{Tr}(M)A-\lambda\mathrm{Tr}(N)A$.

$f(M+\lambda N)=\mathrm{Tr}(A)M-\mathrm{Tr}(M)A+\lambda\left(\mathrm{Tr}(A)N-\mathrm{Tr}(N)A\right)$.

$f(M+\lambda N)=f(M)+\lambda f(N)$: ceci montre que *f* est linéaire.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

2) • Si $\mathrm{Tr}(A)=0$, l'égalité $\mathrm{Tr}(A)M-\mathrm{Tr}(M)A=0$ devient $\mathrm{Tr}(M)A=0$ et comme A n'est pas nulle, on en déduirait $\mathrm{Tr}(M)=0$. Comme il existe des matrices dont la trace n'est pas nulle, l'égalité $\mathrm{Tr}(A)M-\mathrm{Tr}(M)A=0$ n'est donc pas vraie pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Si $\mathrm{Tr}(A)\neq 0$, avec l'égalité $\mathrm{Tr}(A)M-\mathrm{Tr}(M)A=0$, on peut écrire $M=\dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{\mathrm{Tr}(A)}A$. Comme n est supérieur ou égal à 2, il existe des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas proportionnelles à A (sinon $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ serait de dimension 1), ce qui prouve que l'égalité $\mathrm{Tr}(A)M-\mathrm{Tr}(M)A=0$ n'est pas vraie pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Conclusion : *f* n'est pas l'endomorphisme nul.

3) a) .Par définition de *f*, on a : $(f\circ f)(M)=f\left(f(M)\right)=\mathrm{Tr}(A)f(M)-\mathrm{Tr}\left(f(M)\right)A$.

Mais, par linéarité de la trace, on a :

$$\mathrm{Tr}\left(f(M)\right)=\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(M)-\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(A)=0$$

On en déduit :

$$\boxed{(f\circ f)(M)=\mathrm{Tr}(A)f(M)}$$

b) On vient de montrer que $f\circ f=\mathrm{Tr}(A)f$, ce qui prouve que le polynôme $X^2-\mathrm{Tr}(A)X$ est un polynôme annulateur de *f*. Ainsi, les valeurs propres de *f* sont parmi les racines de ce polynôme, et par conséquent :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } f \text{ sont : } 0 \text{ et } \mathrm{Tr}(A)}$$

4) Il suffit de constater que $f(A)=0$ pour conclure que A est vecteur propre de *f* associé à la valeur propre 0 (puisque A n'est pas la matrice nulle).

5) Si $\mathrm{Tr}(A)=0$, alors la seule valeur propre de *f* est 0 et *f* n'est diagonalisable que si *f* est l'endomorphisme nul (puisque sa matrice dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ serait semblable à la matrice nulle donc nulle elle-même).

Mais *f* n'est pas l'endomorphisme nul donc on peut conclure que *f* n'est pas diagonalisable.

6) a) Comme la trace n'est pas une application linéaire nulle (par exemple, on a $\mathrm{Tr}\,(I_n)=n$), son image est $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1, et grâce au théorème du rang, son noyau est de dimension n^2-1.

b) Pour toute matrice M appartenant au noyau de la trace, on a, par définition de l'endomorphisme f :

$$f(M) = \mathrm{Tr}(A)M$$

On en déduit que $\mathrm{Tr}(A)$ est valeur propre de f et que le sous-espace propre associé est de dimension au moins $n^2 - 1$.
Comme, d'après la troisième question, 0 est aussi valeur propre avec un sous-espace propre associé qui est au moins de dimension 1, on conclut :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

Exercice 3 ....

Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

1) a) On reconnaît $\Gamma(k+1)$ qui est convergente et vaut d'ailleurs $k!$.

b) • Soit P et Q deux polynômes de E. Posons $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{3} b_k X^k$.

On a alors : $P(t)Q(t)e^{-t} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_i b_j t^{i+j} e^{-t}$.

On sait que l'intégrale $\Gamma(i+j+1) = \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} dt$ est convergente donc l'intégrale définissant $\langle P,Q \rangle$ est une combinaison linéaire d'intégrales convergentes, elle est donc elle même convergente : $(P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle$ est bien une forme.

• Comme $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$, la forme est symétrique.

• Soit P, Q et R trois polynômes de E et λ un réel, on a par définition :
$\langle \lambda P + Q, R \rangle = \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t)) R(t) e^{-t} \, dt = \int_0^{+\infty} (\lambda P(t)R(t)e^{-t} + Q(t)R(t)e^{-t}) dt$ Par linéarité de l'intégration dans le cadre d'intégrales convergentes, on obtient :

$$\langle \lambda P + Q, R \rangle = \int_0^{+\infty} \lambda P(t)R(t)e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t} dt$$

On a finalement :

$$\langle \lambda P + Q, R \rangle = \lambda \langle P,R \rangle + \langle Q,R \rangle$$

La forme est donc linéaire à gauche et, par symétrie, elle est bilinéaire.

• $(P,P) = \int_0^{+\infty} P^2(t) e^{-t} dt$ donc (P,P) est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant, d'une fonction positive, par conséquent : $(P,P) \geq 0$.

• $(P,P) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} P^2(t) e^{-t} dt = 0$. La fonction $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et son intégrale sur $\mathbb{R}_+$ est nulle donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} = 0$. Mais pour tout réel t, on a $e^{-t} \neq 0$, donc $P^2(t) = 0$ soit : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $P(t) = 0$.
Le polynôme P a une infinité de racines (les réels positifs) donc P est nul.
En conclusion, $(P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, donc :

$$\boxed{(P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

2) Par définition de la norme, on a : $\| X^3 - Q \|^2 = \int_0^{+\infty} \left(t^3 - Q(t)\right)^2 e^{-t} dt$.

En remplaçant, on trouve :

$$\boxed{\| X^3 - Q \|^2 = \int_0^{+\infty} \left(t^3 - xt - y\right)^2 e^{-t} dt}$$

3) a) Le théorème qui assure l'existence et l'unicité du polynôme Q_0 de F qui rend $\| X^3 - Q \|^2$ minimale est le théorème de projection orthogonale : il s'agit ici de la projection orthogonale sur F.

On a alors : $\Delta = \| X^3 - Q_0 \|^2 = \int_0^{+\infty} \left(t^3 - x_0 t - y_0\right)^2 e^{-t} dt$.

b) Comme Q_0 est le projeté orthogonal de X^3 sur F, on sait que $X^3 - Q_0$ est orthogonal à F donc à tout vecteur de F et en particulier aux polynômes 1 et X.
Par conséquent, on a :

$$\left\langle X^3 - Q_0, 1 \right\rangle = \left\langle X^3 - Q_0, X \right\rangle = 0$$

c) En traduisant les deux égalités précédentes, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \left(t^3 - x_0 t - y_0\right) e^{-t} dt = 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} \left(t^4 - x_0 t^2 - y_0 t\right) e^{-t} dt = 0$$

En scindant les intégrales en trois intégrales (convergentes), on trouve :

$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt - x_0 \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt - y_0 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 0$.

$\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt - x_0 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt - y_0 \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 0$.

En remplaçant les valeurs des intégrales gamma, on obtient le système :

$$\begin{cases} 6 - x_0 - y_0 = 0 \\ 24 - 2x_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

d) En soustrayant ces deux équations, on a tout de suite : $x_0 = 18$, puis on trouve ensuite $y_0 = -12$. On a alors : $\Delta = \int_0^{+\infty} \left(t^3 - 18t + 12\right)^2 e^{-t} dt$

En développant, on trouve : $\Delta = \int_0^{+\infty} \left(t^6 - 36t^4 + 24t^3 + 324t^2 - 432t + 144\right) e^{-t} dt$.

En scindant en plusieurs intégrales gamma convergentes, on arrive à :

$$\Delta = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t} dt - 36\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt + 24\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt + 324\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$
$$-432\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt + 144\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

Enfin, on obtient :
$\Delta = 720 - 36 \times 24 + 24 \times 6 + 324 \times 2 - 432 + 144 = 720 - 864 + 144 + 648 - 432 + 144$
Conclusion :

$$\Delta = 360$$

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

4) En développant et en scindant l'intégrale définissant $f(x,y)$ sans se soucier des problèmes de convergence déjà évoqués, on trouve :

$$f(x,y)=\int_0^{+\infty}t^6e^{-t}dt-2x\int_0^{+\infty}t^4e^{-t}dt-2y\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}dt+x^2\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt$$
$$+2xy\int_0^{+\infty}te^{-t}dt+y^2\int_0^{+\infty}e^{-t}dt$$

On a donc :

$$\boxed{f(x,y)=2x^2+y^2+2xy-48x-12y+720}$$

5) La fonction *f* est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x+2y-48 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x+2y-12$$

Les points critiques de *f* sont les solutions du système : $\begin{cases}4x+2y-48=0\\2x+2y-12=0\end{cases}$

En simplifiant, ce système équivaut à : $\begin{cases}2x+y-24=0\\x+y-6=0\end{cases}$.

Avec la transformation $L_1\leftarrow L_1-L_2$, on obtient : $\begin{cases}x-18=0\\x+y-6=0\end{cases}$

On en déduit $x=18$ et $y=-12$.

$$\boxed{\text{Le seul point critique de } f \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ est } (18,-12)}$$

6) La fonction *f* est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, et les dérivées secondes de *f* en ce point sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(18,-12)=4\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(18,-12)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(18,-12)=2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(18,-12)=2$$

Avec les notations de Monge, on en déduit : $rt-s^2=8-4=4>0$. Ceci prouve que *f* a un extremum local au point $(18,-12)$. Comme de plus *r* est strictement positif, cet extremum est un minimum.

En notant *m* ce minimum, on a (calcul déjà fait, mais bon…) :

$m=f(18,-12)=2\times18^2+(-12)^2+2\times18\times(-12)-48\times18-12\times(-12)+720$.

$m=648+144-432-864+144+720=792-432-864+144+720$.

$m=360-864+144+720=1224-864$.

Conclusion :

$$m=360$$

7) Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a :

$$f(x,y)-360=2x^2+y^2+2xy-48x-12y+360$$

On peut écrire successivement :

$f(x,y)-360=2(x^2+xy-24x)+y^2-12y+360$.

$$f(x,y)-360=2\left(\left(x+\frac{y}{2}-12\right)^2-\frac{y^2}{4}+12y-144\right)+y^2-12y+360.$$

$$f(x,y)-360=2\left(x+\frac{y}{2}-12\right)^2+\frac{y^2}{2}+12y+72$$

$$f(x,y)-360=2\left(x+\frac{y}{2}-12\right)^2+\frac{1}{2}\left(y^2+24y+144\right)$$

$$f(x,y)-360=2\left(x+\frac{y}{2}-12\right)^2+\frac{1}{2}\left(y+12\right)^2$$

On constate que $f(x,y)-360$ est positif en tant que somme de deux carrés de réels, ce qui prouve que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(x,y)\geq 360$.
On peut conclure :

$$\boxed{\text{Le minimum } m=360 \text{ de } f \text{ est global}}$$

Remarque. On pouvait également remarquer que comme la hessienne est constante, elle est partout définie positive, ce qui assure que le minimum local est en fait global.

Problème..

1) a) Le réel x étant fixé, la fonction $h: t\mapsto \max(x,t)$ est définie par :

$$h(t)=\begin{cases} x \text{ si } t\leq x \\ t \text{ si } t>x\end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$: elle est constante égale à x sur $\left]-\infty,x\right]$, affine sur $\left]x,+\infty\right[$ et elle est continue en x puisque $\lim\limits_{t\to x^-} h(t)=h(x)=x=\lim\limits_{t\to x^+} h(t)$.
La fonction h est donc, a fortiori, continue sur $[0,1]$, ce qui prouve l'existence de l'intégrale $y=\int_0^1 \max(x,t)dt$.

b) • Si x est négatif ou nul, alors, comme t appartient à $[0,1]$, on a $x\leq t$ et :

$$y=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$$

• Si x appartient à $\left]0,1\right[$, alors :

$$y=\int_0^x \max(x,t)dt+\int_x^1 \max(x,t)dt=\int_0^x x\,dt+\int_x^1 t\,dt=x^2+\frac{1-x^2}{2}=\frac{x^2+1}{2}$$

• Si x est supérieur à 1, alors, comme t appartient à $[0,1]$, on a $t\leq x$ et :

$$y=\int_0^1 x\,dt=x$$

Bilan :

$$\boxed{y=\begin{cases}\frac{1}{2} \text{ si } x\le 0\\ \frac{x^2+1}{2} \text{ si } 0<x<1\\ x \text{ si } x\ge 1\end{cases}}$$

2) Si X suit une loi géométrique alors X prend des valeurs supérieures ou égales à 1 et, pour tout ω de Ω, on a : $Y(\omega)=\int_0^1 X(\omega)dt = X(\omega)$.

Ceci étant vrai pour tout ω de Ω, on a : $Y = X$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Si } X \text{ suit une loi géométrique alors on a : } Y = X}$$

3) a) Comme $X(\Omega)=\{-1,0,1\}$, la famille $((X=-1),(X=0),(X=1))$ est un système complet d'événements et on a : $P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=1$ et comme $P(X=-1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$, on en déduit :

$$\boxed{P(X=0)=\frac{1}{2}}$$

b) D'après la première question, on a les deux affirmations suivantes :

• Si X prend la valeur -1 ou la valeur 0, alors Y prend la valeur $\frac{1}{2}$.

• Si X prend la valeur 1, alors Y prend la même valeur que X, c'est-à-dire 1.

Conclusion :

$$\boxed{Y(\Omega)=\left\{\frac{1}{2},1\right\}}$$

On a : $P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=P(X=-1)+P(X=0)=\frac{3}{4}$ et $P(Y=1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$.

On a donc : $E(Y)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$ et $E(Y^2)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{7}{16}$

On en déduit : $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{7}{16}-\frac{25}{64}=\frac{3}{64}$

En résumé :

$$\boxed{E(Y)=\frac{5}{8} \text{ et } V(Y)=\frac{3}{64}}$$

c) La déclaration complétée est la suivante :

```
Function y : real ;
Var x : real ;
Begin
x : = random(4) ;
```

```
If x = 1 then y := 1 else y := 1/2 ;
End ;
```

4) a) Toujours d'après la première question, on a les deux affirmations suivantes :

• Si X prend la valeur 0, alors Y prend la valeur $\frac{1}{2}$.

• Si X prend une valeur supérieure ou égale à1, alors Y prend la même valeur que X, c'est-à-dire une valeur supérieure ou égale à 1.

Conclusion :

$$\boxed{Y(\Omega)=\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\mathbb{N}^*}$$

On a alors la loi de Y : • $P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=P(X=0)=e^{-\lambda}$.

• $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(Y=k)=P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

b) Pour tout entier naturel k non nul, on a : $k\,P(Y=k)=k\,P(X=k)$ et comme X possède une espérance, Y en possède une également. De plus, on a :

$$E(Y)=\frac{1}{2}\times e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{+\infty}k\,P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}}{2}+E(X).$$

$$\boxed{E(Y)=\frac{e^{-\lambda}}{2}+\lambda}$$

De la même façon, Y possède un moment d'ordre 2 et on a :

$$E(Y^2)=\frac{1}{4}\times e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}}{4}+E(X^2)=\frac{e^{-\lambda}}{4}+V(X)+(E(X))^2.$$

En remplaçant $E(X)$ et $V(X)$, on obtient : $E(Y^2)=\frac{e^{-\lambda}}{4}+\lambda+\lambda^2$.

On sait que $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$ donc : $V(Y)=\frac{e^{-\lambda}}{4}+\lambda+\lambda^2-\left(\frac{e^{-\lambda}}{2}+\lambda\right)^2$.

En réduisant, on obtient :

$$\boxed{V(Y)=\frac{e^{-\lambda}-e^{-2\lambda}}{4}+\lambda\left(1-e^{-\lambda}\right)}$$

5) a) Comme X prend des valeurs comprises entre 0 et 1, alors, toujours d'après la première question, et ceci même si X prend les valeurs 0 et 1, on a :

$$\boxed{Y=\frac{X^2+1}{2}}$$

Remarque. En effet, si X prend la valeur 0, cette égalité donne pour Y la valeur $\frac{1}{2}$, ce qui est correct, et si X prend la valeur 1, cette égalité donne pour Y la valeur 1, comme X, ce qui est encore correct.

b) Comme X^2 prend ses valeurs entre 0 et 1, alors X^2+1 prend ses valeurs entre 1 et 2 et Y prend ses valeurs entre $\frac{1}{2}$ et 1.

$$\boxed{Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},1\right]}$$

c) Pour tout x de $\left[\frac{1}{2},1\right]$, on a :

$F_Y(x)=P(Y\le x)=P\left(\frac{X^2+1}{2}\le x\right)=P\left(X^2+1\le 2x\right)=P\left(X^2\le 2x-1\right)$.

Comme $2x-1$ est positif, on obtient : $F_Y(x)=P\left(-\sqrt{2x-1}\le X\le\sqrt{2x-1}\right)$.

On a donc : $\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $F_Y(x)=F_X\left(\sqrt{2x-1}\right)-F_X\left(-\sqrt{2x-1}\right)$.

Pour finir, $-\sqrt{2x-1}$ est négatif donc $F_X\left(-\sqrt{2x-1}\right)$ est nul et $\sqrt{2x-1}$ appartient à $[0,1]$ donc $F_X\left(\sqrt{2x-1}\right)=\sqrt{2x-1}$. Ainsi, il reste :

$$\boxed{\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ F_Y(x)=\sqrt{2x-1}}$$

d) Si on complète la définition de F_Y, on obtient :

$$F_Y(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<\frac{1}{2}\\ \sqrt{2x-1} \text{ si } \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$$

On sait déjà que Y est une variable aléatoire (c'est admis par l'énoncé), il reste à vérifier deux conditions :

- F_Y est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

La continuité de F_Y sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ et sur $]1,+\infty[$ est acquise puisque la restriction de F_Y à ces intervalles est constante donc continue.

La continuité de F_Y sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$ est acquise puisque F_Y est polynomiale sur cet intervalle.

En $\frac{1}{2}$, on a : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} F_Y(x) = F_Y(\frac{1}{2}) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} 0 = 0$.

En 1, on a : $\lim\limits_{x \to 1^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} F_Y(x) = F_Y(1) = 0$.

Premier bilan : la fonction F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$.

• F_Y est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points (ici, en $\frac{1}{2}$ et en 1) ?

La classe C^1 de F_Y sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et sur $]1,+\infty[$ est acquise puisque F_Y est constante sur ces intervalles.

La classe C^1 de F_Y sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ est acquise puisque F_Y polynomiale sur cet intervalle.

Deuxième bilan : la fonction F_Y est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en $\frac{1}{2}$ et en 1.

On peut conclure :

$$\boxed{Y \text{ est une variable à densité}}$$

e) D'après la question 4a), on sait que : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

On sait que X possède un moment d'ordre 2 donc Y possède une espérance.

De plus, on a : $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

Par linéarité de l'espérance, on a : $E(Y) = \frac{1}{2}E(X^2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$.

Bilan :

$$\boxed{E(Y) = \frac{2}{3}}$$

f) La déclaration de fonction complétée est la suivante :

```
Function y : real ;
Begin
y : = (sqr(x) + 1) / 2 ;
End ;
```

6) a) Puisque $X-1$ suit une loi exponentielle, on en déduit que $(X-1)(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et, par conséquent, on a : $X(\Omega) = [1,+\infty[$.

Comme X ne prend que des valeurs supérieures ou égales à 1, le résultat de la première question donne : $Y = X$.

Remarque. Si X prend la valeur 1, on a $Y = \dfrac{X^2+1}{2} = 1 = X$, ce qui est correct.

b) Comme $Y = X$, on a, par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = E(X) = E(X-1)+1$$

La loi de $X-1$ est la loi exponentielle de paramètre λ donc $E(X-1) = \dfrac{1}{\lambda}$ et ainsi :

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{\lambda}+1}$$

De même, on a : $V(Y) = V(X) = V(X-1)$ donc :

$$\boxed{V(Y) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

c) En notant F_W et F_U les fonctions de répartition de W et U, on a, pour tout réel x :

$F_W(x) = P(W \leq x) = P(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x) = P(\ln(1-U) \geq -\lambda x) = P(1-U \geq e^{-\lambda x})$.

La dernière égalité provient du fait que la fonction exponentielle est une **bijection croissante** de $\mathbb{R}$ vers $]0,+\infty[$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_W(x) = P(U \leq 1-e^{-\lambda x}) = F_U(1-e^{-\lambda x})$.

La fonction exponentielle est à valeurs dans $]0,+\infty[$ donc : $1-e^{-\lambda x} < 1$.

• Si $x \geq 0$, alors, comme $\lambda > 0$, on a $e^{-\lambda x} \leq 1$ d'où $1-e^{-\lambda x} \geq 0$.

On déduit de ce qui précède que $0 \leq 1-e^{-\lambda x} < 1$. Or $F_U(z) = z$ si $0 \leq z < 1$ donc, en remplaçant, on obtient :

$$\forall x \geq 0,\ F_W(x) = 1-e^{-\lambda x}$$

• Si $x < 0$, alors, comme $\lambda > 0$, on a $e^{-\lambda x} > 1$, soit $1-e^{-\lambda x} < 0$.

Or $F_U(z) = 0$ si $z < 0$, donc, en remplaçant, on obtient :

$$\forall x < 0,\ F_W(x) = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{W \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda}$$

La déclaration de fonction complétée est la suivante :

```
Function y(lambda : real) : real ;
Begin y : = –ln(1 – random) / lambda ; End ;
```

7) a) D'après la première question, on a, pour tout ω de Ω :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ si } X(\omega) \leq 0 \\ \dfrac{X(\omega)^2+1}{2} \text{ si } 0 < X(\omega) < 1 \\ X(\omega) \text{ si } X(\omega) \geq 1 \end{cases}$$

On en déduit :

• Lorsque X prend des valeurs négatives ou nulles, Y prend la valeur $\dfrac{1}{2}$.

• Lorsque X prend des valeurs entre 0 et 1, Y prend des valeurs entre $\frac{1}{2}$ et 1 comme à la question 4b).
• Lorsque X prend des valeurs supérieures à 1, Y prend des valeurs supérieures à 1 (puisque Y et X prennent les mêmes valeurs).
Ainsi, on a bien :

$$\boxed{Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[}$$

b) En analysant précisément les trois points ci-dessus, on voit que Y prend la valeur $\frac{1}{2}$ si, et seulement si, X prend des valeurs négatives ou nulles.

On a donc : $P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=P(X\leq 0)=\Phi(0)$. Comme $\Phi(0)=\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\boxed{P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}}$$

c) Pour commencer, si $x<\frac{1}{2}$, on a : $F_Y(x)=0$.

Pour tout x supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left([X\leq 0],[0<X\leq 1],[X>1]\right)$ s'écrit :

$P(Y\leq x)=P(X\leq 0)+P\left([Y\leq x]\cap[0<X\leq 1]\right)+P\left([Y\leq x]\cap[X>1]\right)$

D'après l'étude faite à la question 5a), on obtient :

$P(Y\leq x)=P\left([Y\leq x]\cap[X\leq 0]\right)+P\left(\left[\frac{X^2+1}{2}\leq x\right]\cap[0<X\leq 1]\right)+P\left([X\leq x]\cap[X>1]\right)$

On a donc :

$F_Y(x)=P(X\leq 0)+P\left(\left[-\sqrt{2x-1}\leq X\leq\sqrt{2x-1}\right]\cap[0<X\leq 1]\right)+P\left([X\leq x]\cap[X>1]\right)$

$F_Y(x)=P(X\leq 0)+P\left(\max\left(-\sqrt{2x-1},0\right)<X\leq\min\left(\sqrt{2x-1},1\right)\right)+P\left([X\leq x]\cap[X>1]\right)$

Comme $-\sqrt{2x-1}\leq 0$, on peut simplifier la deuxième probabilité et on a :

$F_Y(x)=P(X\leq 0)+P\left(0<X\leq\min\left(\sqrt{2x-1},1\right)\right)+P\left([X\leq x]\cap[X>1]\right)$

À ce stade, il faut savoir si x est supérieur à 1 ou pas, afin de trancher pour la valeur du max mis en jeu dans la deuxième probabilité et pour savoir si la troisième probabilité est nulle ou pas. .

• Si $x\leq 1$, alors $\min\left(\sqrt{2x-1},1\right)=\sqrt{2x-1}$ et $P\left([X\leq x]\cap[X>1]\right)=0$ donc :

$F_Y(x)=P(X\leq 0)+P\left(0<X\leq\sqrt{2x-1}\right)=P\left(X\leq\sqrt{2x-1}\right)=\Phi\left(\sqrt{2x-1}\right)$.

• Si $x>1$, alors $\min\left(\sqrt{2x-1},1\right)=1$ et $\left([X\leq x]\cap[X>1]\right)=(1<X\leq x)$ donc :

$F_Y(x)=P(X\leq 0)+P(0<X\leq 1)+P(1<X\leq x)=P(X\leq x)=\Phi(x)$.

Bilan :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \dfrac{1}{2} \\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) \text{ si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \Phi(x) \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

d) Comme $P\left(Y = \dfrac{1}{2}\right) \neq 0$, Y n'est pas une variable à densité et comme $Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, Y n'est pas une variable discrète.

e) Les variables $U_1,...,U_{48}$ sont indépendantes, suivent toutes la même loi et ont une espérance égale à $\dfrac{1}{2}$ et une variance égale à $\dfrac{1}{12}$, donc, d'après le théorème de la limite centrée, on sait que $Z_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} U_k - \dfrac{n}{2}}{\sqrt{\dfrac{n}{12}}}$ converge en loi vers une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Comme 48 est grand, on peut considérer ici que la variable aléatoire $Z_{48} = \dfrac{\sum_{k=1}^{48} U_k - \dfrac{48}{2}}{\sqrt{\dfrac{48}{12}}} = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{48} U_k - 24\right)$ suit la loi normale centrée réduite.

```
Function y : real ;
Var k : integer ;  aux : real ;
Begin
aux : = 0 ;
For k : = 1 to 48 do aux : = aux + random ;
x : = (aux−24) / 2 ;
If  x <= 0  then  y : = 1 / 2  else
                              If x < 1  then  y : = (x * x + 1) / 2  else  y : = x ;
End ;
```

EDHEC BUSINESS SCHOOL

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2014

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option scientifique

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (premier exercice et problème).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme. Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet long, assez difficile et sélectif. La présence de nombreuses questions techniquement difficiles ou abstraites a permis de bien apprécier, d'une part les capacités à mener un calcul compliqué à son terme et d'autre part les capacités à raisonner des candidats : ceux d'entre eux qui étaient bien préparés se sont très bien démarqués alors que ceux qui l'étaient moins ont montré leurs faiblesses théoriques ainsi que leur mauvaise maîtrise des techniques de base.

• **L'exercice 1** proposait le calcul de l'intégrale $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}dt$ à l'aide de la convolution des carrés de deux variables aléatoires suivant la loi normale centrée réduite.

Cet exercice, assez simple (il y avait plusieurs questions de cours) a permis à presque tous les candidats de marquer quelques points malgré de nombreuses fautes sur la stabilité de la loi gamma pour l'addition.

• **L'exercice 2** présentait l'application *f* qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associait :

$$f(M) = Tr(A)M - Tr(M)A$$

où A est une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cet exercice, a révélé quelques failles dans les connaissances de nombreux candidats qui assènent que $Tr(M)$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou que la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égale à *n*, ou même que, si $Tr(A)M = Tr(M)A$, alors $M = A$, ce qui est faux. En dehors de ces grosses fautes, trop souvent lues, les correcteurs ont pu mesurer à quel point l'algèbre linéaire pose problème aux candidats dès qu'il s'agit de manipuler les concepts (par exemple, pour la détermination de la dimension du noyau de l'application Trace).

• **L'exercice 3** sur le programme d'algèbre bilinéaire et d'analyse, avait pour objectif de déterminer le réel Δ défini par :

$$\Delta = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$$

Ce calcul était fait de deux façons différentes : d'abord en utilisant le théorème de minimisation par projection orthogonale et ensuite en cherchant le minimum global d'une fonction de deux variables.

Cet exercice a été abordé avec des fortunes diverses, certains candidats ayant visiblement très peu de connaissances sur cette partie portant exclusivement sur le programme de seconde année. Beaucoup ignorent la fonction Gamma d'Euler et ne connaissent pas la valeur de $\Gamma(k+1)=\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$.

Les correcteurs ont eu la surprise de voir certains candidats ne pas savoir développer correctement $(t^3-xt-y)^2$, ce qui portait un grave préjudice à la suite de leur composition.

• **Le problème**, portant sur le programme de probabilités, mais sur la partie "variables à densité", avait pour but d'étudier une variable aléatoire Y définie en fonction d'une variable aléatoire X par :

$$Y(\omega)=\int_0^1 \max(X(\omega),t)\,dt$$

Le problème a dérouté quelques candidats du moins dans les deux premières questions, mais comme les résultats difficiles à établir étaient donnés, les plus valeureux ont pu (et souvent de belle manière) tirer leur épingle du jeu dans la suite.

On a beaucoup lu, donnée sans aucun argument, l'égalité : $P(X^2\leq 2x-1)=P\left(X\leq\sqrt{2x-1}\right)$.

La superficialité des connaissances de nombreux candidats les a conduits à trouver des fonctions de répartition farfelues ou définies seulement sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right[$.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3856 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11,44 sur 20 (supérieure de 0,1 point à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 5,98 (légèrement inférieur à celui de l'année dernière).

• 31,4 % des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (13,7 % ont une note inférieure à 4). Le nombre de copies très faibles (note inférieure à 4) est stable par rapport à l'année dernière.

• 21 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (1 point de plus que l'année dernière).

• 28,5 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (1 demi point de plus que l'année dernière).

Conclusion :

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées et bien rédigées, malgré la présence d'un nombre non négligeable de candidats qui sont adeptes des réponses floues et pas toujours argumentées. Il faut savoir que les correcteurs attendent des preuves et pas seulement des affirmations.

Le niveau moyen est un peu plus élevé que l'année dernière alors que le nombre de candidats est plus important (3856 contre 3609 l'année dernière) : peut-être n'étaient-ils pas tous tout à fait prêts.
L'épreuve était, comme par le passé, exigeante, et beaucoup de candidats s'en sortent avec les honneurs (les correcteurs les félicitent), mais il faut tout de même noter qu'un nombre considérable d'entre eux sont incapables de donner la valeur de $6!$, beaucoup connaissent mal la loi gamma et un grand nombre écrivent $P(X^2\leq x)=P\left(X\leq\sqrt{x}\right)$, ce qui est faux, voire même délirant lorsque cette égalité est écrite pour tout réel x.

Cette année, nous notons une forte recrudescence de candidats ayant osé suggérer à tort que l'énoncé était bancal ou faux (ceci s'expliquant par le fait que les candidats en question ne savaient pas suffisamment bien leur cours) : ces candidats donnent d'eux une image très négative et montrent qu'ils manquent sérieusement d'humilité : qu'en sera-t-il en école, puis en entreprise ?

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.