
BIENVENUE DANS NOS RESEAUX D'ENERGIE
Avec 250 entreprises partenaires, 27 000 anciens diplômés présents dans 121 pays, un maillage unique de professeurs, d'associations, et d'ambassadeurs, le réseau de l'EDHEC est une véritable force sur laquelle vous pourrez compter tout au long de votre cursus et de votre carrière. Venez vous inscrire dans une dimension résolument internationale et découvrir un nouveau monde, celui des réseaux et de l'excellence, qui vous ouvrira d'innombrable portes.
www.edhec-ge.com
Marc-Antoine,
étudiant en pré-Master
EDHEC
BUSINESS SCHOOL

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

6 mai 2014 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres λ de A sont les solutions de l'équation $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.

b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variation (on précisera les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m, ni à calculer M).

c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.

d) Montrer que A possède trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

e) En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2) L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) M est une matrice de E.

(ii) $P^{-1}MP$ commute avec D.

c) Établir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} \text{ et } P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

e) Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que (I, A, A^2) est une base de E.

Exercice 2

1) Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$ est définie pour tout réel x.

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

2) Établir que f est impaire.

3) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) a) En utilisant la relation $t^2 \le t^2+1 \le t^2+2t+1$, valable pour tout réel t positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \le f(x) \le \ln 2$$

b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation complet de f.

d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5) a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

6) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\,dt$.

b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \le x - f(x) \le \frac{7}{6}x^3$$

c) Conclure que : $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$

d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Exercice 3

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = u_k$$

2) a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

b) Compléter la fonction Pascal suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X.

```
Function X (theta : real) : integer ;
var Y : real ;
Begin Y := 0 ;   Repeat Y : = Y + 1 ; until(------) ; X := ------ ; end ;
```

3) Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit la fonction L, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$$

où $x_1, x_2, ..., x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.

L'objectif est de choisir la valeur de θ qui rend $L(\theta)$ maximale.

a) Écrire $\ln(L(\theta))$ en fonction de θ et de $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

b) On considère la fonction φ, définie par :

$$\forall \theta \in]0, +\infty[,\ \varphi(\theta) = S_n \ln\theta - (S_n + n)\ln(1+\theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta_n}$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\widehat{\theta_n}$ pour la fonction L ?

On pose dorénavant : $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

c) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ.

d) Calculer le risque quadratique $r_{T_n}(\theta)$ de T_n et vérifier que $\lim_{n\to+\infty} r_{T_n}(\theta) = 0$.

Problème

1) Soit x un réel quelconque.

a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x,t)dt$.

b) Montrer que : $y = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \le 0 \\ \frac{x^2+1}{2} \text{ si } 0 < x \le 1 \\ x \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, en posant $Y = \int_0^1 \max(X,t)dt$, ce qui signifie que, pour tout ω de Ω, on a :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega),t)dt$$

On note F_Y la fonction de répartition de Y.

On se propose dans la suite de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

2) Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.

3) On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{4}$$

a) Déterminer la valeur de $P(X=0)$.

b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y.

c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
Var u : integer ;
Begin
u : = random(4) ;
If ------ then ------ else y : = ------ ;
End ;
```

4) On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0,1[$, avec $X(\Omega) = [0,1[$.

a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

b) En déduire que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.

d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.

e) Donner la valeur de $E(Y)$.

f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
    Var u : real ;
  Begin
    u : = random ;
    y : = ------ ;
  End ;
```

5) On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

b) Donner la valeur de $P\left(Y = \frac{1}{2}\right)$.

c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1]\right)$ pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) \text{ si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \Phi(x) \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

d) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

Corrigé 2014

Exercice 1 ....

1) a) Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels $(A-\lambda I)$ n'est pas inversible.

Pour tout réel λ, $A-\lambda I = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$.

Avec l'opération $L_1 \leftrightarrow L_3$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant, on fait les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow 6L_3 - (7-\lambda)L_1$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda+23 & -\lambda^2+10\lambda-15 \end{pmatrix}$$

On obtient un pivot plus agréable en effectuant l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -\lambda^2+11\lambda-16 \\ 0 & \lambda+23 & -\lambda^2+10\lambda-15 \end{pmatrix}$$

Pour finir, on effectue l'opération $L_3 \leftarrow 21L_3 - (\lambda+23)L_2$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -\lambda^2+11\lambda-16 \\ 0 & 0 & \lambda^3-9\lambda^2-27\lambda+53 \end{pmatrix}$$

La réduite de Gauss ci-dessus étant triangulaire, elle n'est pas inversible si et seulement si $\lambda^3-9\lambda^2-27\lambda+53=0$. Il en est de même de la matrice $(A-\lambda I)$.
En conclusion :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres } \lambda \text{ de } A \text{ sont les solutions de } \lambda^3-9\lambda^2-27\lambda+53=0}$$

b) La fonction f est polynomiale donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Avec $f(x)=x^3-9x^2-27x+53$,on a $f'(x)=3(x^2-6x-9)$.
Le trinôme x^2-6x-9 a deux racines : $3(1+\sqrt{2})$ et $3(1-\sqrt{2})$.
On a donc (signe du trinôme) : $f'(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in[3(1-\sqrt{2}),3(1+\sqrt{2})]$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Le tableau de variation de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		$3(1-\sqrt{2}\,)$		$3(\;1+\sqrt{2}\,)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	M	↘	m	↗	$+\infty$

c) On a $f(0) = 53 > 0$ et $f(3) = -82 < 0$.
Sur l'intervalle $[3(1-\sqrt{2}\,), 3(1+\sqrt{2}\,)]$, f est strictement décroissante donc, comme 0 appartient à cet intervalle, on a : $f(3(1-\sqrt{2}\,)) > f(0)$, ce qui prouve que M est supérieur à 53, donc en particulier : $M > 0$.
De même 3 appartient à ce même intervalle donc $f(3) > f(3(1+\sqrt{2}\,))$, ce qui prouve que : m est inférieur à -82, donc en particulier : $m < 0$.

d) En appliquant trois fois le théorème de la bijection à la fonction f sur les intervalles $]-\infty, 3(1-\sqrt{2}\,)[$, $]3(1-\sqrt{2}\,), 3(1+\sqrt{2}\,)[$ et $]3(1+\sqrt{2}\,), +\infty[$, intervalles sur lesquels f est continue et strictement monotone, et comme le nombre 0 appartient aux intervalles images (puisque $m < 0 < M$), on peut affirmer que la fonction f s'annule une fois sur chacun des intervalles $]-\infty, 3(1-\sqrt{2}\,)[$, $]3(1-\sqrt{2}\,), 3(1+\sqrt{2}\,)[$ et $]3(1+\sqrt{2}\,), +\infty[$ en des réels que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3.
Ceci prouve, en relation avec la question 1a), que la matrice A possède 3 valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 et λ_3.
A étant une matrice de taille 3 ayant 3 valeurs propres distinctes, on peut dire que :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$$

e) Comme A est diagonalisable, on sait que, si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ est la matrice dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A, alors il existe une matrice inversible P telle que $A = P\,D\,P^{-1}$, les colonnes de la matrice P étant respectivement les vecteurs de base des sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.

2) a) Soit $N = \begin{pmatrix} a & u & x \\ b & v & y \\ c & w & z \end{pmatrix}$. Comme $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, N commute avec D si et seulement si $\begin{pmatrix} a & u & x \\ b & v & y \\ c & w & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & u & x \\ b & v & y \\ c & w & z \end{pmatrix}$

Ce qui signifie : $\begin{pmatrix} a\lambda_1 & u\lambda_2 & x\lambda_3 \\ b\lambda_1 & v\lambda_2 & y\lambda_3 \\ c\lambda_1 & w\lambda_2 & z\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & u\lambda_1 & x\lambda_1 \\ b\lambda_2 & v\lambda_2 & y\lambda_2 \\ c\lambda_3 & w\lambda_3 & z\lambda_3 \end{pmatrix}$.

En identifiant, et après factorisation, on obtient :
$ND = DN \Leftrightarrow u(\lambda_2-\lambda_1) = x(\lambda_3-\lambda_1) = b(\lambda_2-\lambda_1) = y(\lambda_3-\lambda_2) = c(\lambda_3-\lambda_1) = w(\lambda_3-\lambda_2) = 0$.

Comme λ_1, λ_2 et λ_3 sont deux à deux distinctes, les facteurs $(\lambda_2-\lambda_1)$, $(\lambda_3-\lambda_1)$ et $(\lambda_3-\lambda_2)$ sont non nuls et on obtient :

$$ND = DN \Leftrightarrow u = x = b = y = c = w = 0.$$

En remplaçant dans l'expression de N, on trouve finalement :

$$ND = DN \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Ceci prouve bien que :

$$\boxed{\text{Les matrices qui commutent avec } D \text{ sont les matrices diagonales}}$$

b) $M \in E \Leftrightarrow MA = AM \Leftrightarrow MPDP^{-1} = PDP^{-1}M.$
En multipliant les deux membres à gauche par P^{-1} et à droite par P, l'équivalence est respectée (puisque P et P^{-1} sont inversibles) et on trouve :
$M \in E \Leftrightarrow P^{-1}MPDP^{-1}P = P^{-1}PDP^{-1}MP.$
Finalement, après simplification : $M \in E \Leftrightarrow P^{-1}MPD = DP^{-1}MP.$
On a bien montré que :

$$\boxed{M \in E \Leftrightarrow P^{-1}M\,P \text{ commute avec } D}$$

c) D'après la question 2c), on sait alors que $P^{-1}M\,P$ est diagonale. Il existe donc 3 réels a, b et c tels que :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En multipliant les deux membres à gauche par P et à droite par P^{-1}, on trouve :

$$M = aP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + bP\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + cP\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

On a bien le résultat demandé :

$$\boxed{M \text{ est combinaison linéaire de } P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}}$$

d) E est l'ensemble des combinaisons linéaires des 3 matrices ci-dessus donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
La famille constituée des 3 matrices ci-dessus est ainsi une famille génératrice de l'espace vectoriel E.
Testons sa liberté en considérant 3 réels a, b et c tels que :

$$aP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + bP\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + cP\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = 0$$

Ceci s'écrit : $P\left(a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)P^{-1}=0.$

En multipliant les deux membres à gauche par P^{-1} et à droite par P, on trouve :

$$a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=0\text{, soit encore }\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}=0.$$

On conclut bien sûr que : $a = b = c = 0$.

La famille $\left(P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)$ est libre, et comme elle engendre E, c'est une base de E et on peut conclure :

$$\boxed{\dim E = 3}$$

e) • S'il existait un polynôme annulateur de A non nul et de degré inférieur ou égal à 2, les valeurs propres de A seraient parmi les racines de ce polynômes et ainsi, A aurait au maximum deux valeurs propres, ce qui n'est pas le cas.

• Pour montrer que (I, A, A^2) est une base de E, il suffit de montrer que ces trois matrices appartiennent à E et forment une famille libre (car on sait que E est de dimension 3).

• On a : $IA = A = AI$ donc $I \in E$.
• A commute avec elle-même donc $A \in E$.
• De plus : $AA^2 = A^3 = A^2A$ donc $A^2 \in E$.
• Il reste à montrer que (I, A, A^2) est une famille libre.

Raisonnons par l'absurde : si la famille (I, A, A^2) était liée, il existerait trois réels a, b et c non tous nuls tels que $aI + bA + cA^2 = 0$. Ceci prouverait que le polynôme non nul $a + bX + cX^2$ serait annulateur de A, ce qui est impossible puisque A ne possède pas de polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à 2

$$\boxed{(I, A, A^2)\text{ est une base de }E}$$

Remarque. Par une méthode directe (test de liberté après calcul de A^2), on prouve facilement la liberté de cette famille mais l'énoncé exigeait une méthode originale.

Exercice 2 ....

1) La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur tout intervalle de la forme $[x, 2x]$ si $x \geq 0$ ou $[2x, x]$ si $x \leq 0$: ceci prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$ est définie pour tout réel x.

2) L'ensemble de définition de f est bien centré en 0 (c'est $\mathbb{R}$) et, pour tout réel x, on a :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

Le changement de variable $u = -t$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (donc de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration) donne alors :

$$f(-x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}}\,(-du)$$

On en déduit : $f(-x) = -\int_{x}^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du = -f(x)$.

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est impaire}}$$

3) a) En notant H une primitive de h sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = H(2x) - H(x)$. Comme H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (puisque sa dérivée est h qui est continue), on peut affirmer que, par composition et différence, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\,h(2x) - h(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}\sqrt{x^2+1}}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{4x^2+1}$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{3}{(2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{4x^2+1})\sqrt{x^2+1}\sqrt{4x^2+1}}}$$

b) On a tout de suite : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. Ceci montre que :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

4) a) Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, la relation donnée par l'énoncé nous donne : $t \leq \sqrt{t^2+1} \leq t + 1$ ($\sqrt{t^2} = t$ car $t \geq 0$).
On peut alors inverser, pour tout t strictement positif, et on obtient :

$$\forall t > 0,\ \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}$$

Pour tout réel x strictement positif, on peut intégrer ces fonctions continues sur l'intervalle $[x, 2x]$, avec les bornes dans l'ordre croissant, ce qui donne :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,dt \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$$

On peut écrire ceci sous la forme : $\ln(2x+1) - \ln x \leq f(x) \leq \ln 2x - \ln x$.
On obtient enfin :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq f(x) \leq \ln 2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$ donc, par continuité de ln en 2, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\frac{2x+1}{x+1}) = \ln 2$.

Le théorème d'encadrement permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2}$$

c) Par imparité de *f*, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\ln 2$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\ln 2$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\ln 2$

d) Comme $f(0)=0$ (évident) et comme *f* est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\ln 2, \ln 2[$ et ainsi, l'équation $f(x)=0$ a une seule solution et cette solution est 0.

5) a) Pour tout réel *x*, on a : $x^2+1>x^2$. En appliquant la fonction racine carrée, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $\sqrt{x^2+1}>|x|$.

De plus, on sait que $|x|\geq -x$ (il y a égalité si *x* est négatif et si *x* est strictement positif, alors l'inégalité est évidente entre le nombre strictement positif $|x|$ et le nombre strictement négatif $-x$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ x+\sqrt{x^2+1}>0}$$

b) D'après ce qui précède, la fonction *h* qui, à tout réel *x* associe $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est bien définie et elle est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

On trouve :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

c) On vient de montrer que *h* est une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, ce qui permet d'écrire : $f(x)=h(2x)-h(x)$.

En remplaçant par les expressions de $h(x)$ et $h(2x)$, on trouve :

$$\boxed{f(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

6) a) Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x-f(x)=\int_x^{2x} 1dt-\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int_x^{2x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)dt$$

On a alors, en réduisant au même dénominateur :

$$x-f(x)=\int_x^{2x}\left(\frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}}\right)dt$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{t^2+1}+1$, on obtient :

$$x-f(x)=\int_x^{2x}\frac{\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}dt$$

En simplifiant le numérateur, on trouve :

$$\boxed{x-f(x)=\int_x^{2x}\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}dt}$$

b) Il est évident que $x-f(x)\geq 0$ (intégrale bornes dans l'ordre croissant d'une fonction positive).

Ensuite, il faut majorer la fonction intégrée en minorant $\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)$ par 2 (puisque $t^2+1\geq 1$), ce qui donne : $\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\leq\dfrac{t^2}{2}$.

En intégrant, bornes toujours dans l'ordre croissant, on obtient :

$$\int_x^{2x}\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}dt\leq\int_x^{2x}\frac{t^2}{2}dt$$

Comme $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{t^2}{2}dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_x^{2x}=\frac{1}{6}\left(8x^3-x^3\right)$, on trouve enfin :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ 0\leq x-f(x)\leq\frac{7}{6}x^3}$$

c) En divisant les trois membres de cet encadrement par x qui est strictement positif, on a : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ 0\leq 1-\dfrac{f(x)}{x}\leq\dfrac{7}{6}x^2$.

Le théorème d'encadrement assure que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{f(x)}{x}\right)=0$, ce qui veut dire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1$. Conclusion :

$$\boxed{f(x)\underset{0^+}{\sim}x}$$

d) On en déduit que, si x est au voisinage de 0^-, alors $-x$ est au voisinage de 0^+ et d'après ce qui précède, on a : $f(-x)\underset{0^-}{\sim}-x$.

Comme la fonction *f* est impaire, ceci s'écrit : $-f(x) \underset{0^-}{\sim} -x$ et on a : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Exercice 3 ....

1) • Comme θ est un réel strictement positif, tous les termes de la suite (u_k) sont bien définis (car $1+\theta>0$) et positifs (car $\theta>0$ et $1+\theta>0$).

• La série de terme général $\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k$ est une série géométrique convergente puisque sa raison $\frac{\theta}{1+\theta}$ appartient à $]0,1[$ donc, a fortiori, à $]-1,1[$.

On a alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{1+\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k = \frac{1}{1+\theta}\times\frac{1}{1-\frac{\theta}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta}\times\frac{1}{\frac{1}{1+\theta}} = 1$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ définit une loi de probabilité}}$$

2) Comme $Y = X+1$, on a $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et, pour tout *k* de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P(Y=k)=P(X+1=k)=P(X=k-1)=\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{k-1}$$

On en conclut que *Y* suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{1+\theta}$, ce qui prouve que : $E(Y)=1+\theta$ et $V(Y)=\dfrac{1-\frac{1}{1+\theta}}{\frac{1}{(1+\theta)^2}}=\dfrac{\theta}{1+\theta}\times(1+\theta)^2=\theta(1+\theta)$.

Avec la relation $X=Y-1$, on obtient :

$$E(X)=E(Y)-1=1+\theta-1=\theta \text{ et } V(X)=V(Y)=\theta(1+\theta)$$

Bilan :

$$\boxed{E(X)=\theta \text{ et } V(X)=\theta(1+\theta)}$$

3) a) Par définition de la fonction *L*, et comme les variables X_k ont la même loi que *X*, on a : $L(\theta)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}P(X_k=x_k)=\prod_{k=1}^{n}P(X=x_k)$.

En remplaçant les probabilités, on obtient :

$$L(\theta)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right)=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n\prod_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right)$$

Comme tout est strictement positif, on peut prendre le logarithme et, grâce aux propriétés du logarithme, on trouve :

$$\ln\left(L(\theta)\right) = n\ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) + \sum_{k=1}^{n} x_k \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) = n\ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) + \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Avec la notation donnée par l'énoncé, on a finalement :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(L(\theta)\right) = n\ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) + S_n \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

On peut arranger ceci en prévision de la suite, toujours avec les propriétés du logarithme : $\forall\theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(L(\theta)\right) = -n\ln(1+\theta) + S_n\left(\ln\theta - \ln(1+\theta)\right)$.

En regroupant, on a :

$$\boxed{\forall\theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(L(\theta)\right) = S_n \ln\theta - (S_n + n)\ln(1+\theta)}$$

b) Pour tout θ de $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\varphi(\theta) = S_n \ln\theta - (S_n + n)\ln(1+\theta)$.

La fonction φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables et on a :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(\theta) = \frac{S_n}{\theta} - \frac{S_n + n}{1+\theta} = \frac{S_n - n\theta}{\theta(1+\theta)}$$

Comme le dénominateur est positif, $\varphi'(\theta)$ a même signe que $S_n - n\theta$ et on a :

$$\varphi'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow S_n - n\theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq \frac{S_n}{n}$$

Ceci prouve que φ est croissante sur $\left]-\infty, \frac{S_n}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{S_n}{n}, +\infty\right[$ donc φ admet un maximum atteint en $\hat{\theta} = \frac{S_n}{n}$.

On vient de montrer que $\ln L$ a un maximum en $\hat{\theta} = \frac{S_n}{n}$. De plus, $\ln L$ a les mêmes variations que L (car $(\ln L)' = \frac{L'}{L}$ et L est positive donc $(\ln L)'$ a le même signe que L'), par conséquent :

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{S_n}{n} \text{ est le réel en lequel } L \text{ atteint son maximum}}$$

c) Comme les variables X_i ont toutes une espérance égale à θ, alors T_n a une espérance et, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta = \frac{1}{n} \times n\theta = \theta$$

$$\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$$

d) Comme T_n est un estimateur sans biais de θ, son risque quadratique est égal à sa variance et on a : $r_{T_n}(\theta) = V(T_n) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$. Comme les X_i sont indépendantes, on obtient :

$$r_{T_n}(\theta) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\theta(1+\theta) = \frac{1}{n^2}\times n\theta(1+\theta)$$

On a donc :

$$\boxed{r_{T_n}(\theta) = \frac{\theta(1+\theta)}{n}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_{T_n}(\theta) = 0}$$

Problème...

1) a) Le réel x étant fixé, la fonction $h : t \mapsto \max(x,t)$ est définie par :

$$h(t) = \begin{cases} x \text{ si } t \leq x \\ t \text{ si } t > x \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$: elle est constante égale à x sur $]-\infty, x]$, affine sur $]x, +\infty[$ et elle est continue en x puisque $\lim_{t\to x^-} h(t) = h(x) = x = \lim_{t\to x^+} h(t)$.

La fonction h est donc, a fortiori, continue sur $[0,1]$, ce qui prouve l'existence de l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x,t)dt$.

b) • Si x est négatif ou nul, alors, comme t appartient à $[0,1]$, on a $x \leq t$ et :

$$y = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

• Si x appartient à $]0,1[$, alors :

$$y = \int_0^x \max(x,t)dt + \int_x^1 \max(x,t)dt = \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt = x^2 + \frac{1-x^2}{2} = \frac{x^2+1}{2}$$

• Si x est supérieur à 1, alors, comme t appartient à $[0,1]$, on a $t \leq x$ et :

$$y = \int_0^1 x\,dt = x$$

Bilan :

$$\boxed{y = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{2} \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \text{ si } x \geq 1 \end{cases}}$$

2) Si X suit une loi géométrique alors X prend des valeurs supérieures ou égales à 1 et, pour tout ω de Ω, on a : $Y(\omega)=\int_0^1 X(\omega)dt = X(\omega)$.

Ceci étant vrai pour tout ω de Ω, on a : $Y = X$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Si } X \text{ suit une loi géométrique alors on a : } Y = X}$$

3) a) Comme $X(\Omega)=\{-1, 0, 1\}$, la famille $((X=-1),(X=0),(X=1))$ est un système complet d'événements et on a : $P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=1$. Comme $P(X=-1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$, on en déduit :

$$\boxed{P(X=0)=\frac{1}{2}}$$

b) D'après la première question, on peut affirmer les choses suivantes :

• Si X prend la valeur -1 ou la valeur 0, alors Y prend la valeur $\frac{1}{2}$.

• Si X prend la valeur 1, alors Y prend la même valeur que X, c'est-à-dire 1.

Conclusion :

$$\boxed{Y(\Omega)=\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}}$$

On a : $P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=P(X=-1)+P(X=0)=\frac{3}{4}$ et $P(Y=1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$.

c) La déclaration complétée est la suivante :

```
Function y : real ;
Var x : real ;
Begin
x : = random(3) – 1 ;
If x = 1 then y : = 1 else y : = 1 / 2 ;
End ;
```

4) a) Comme X prend des valeurs comprises entre 0 et 1, alors, toujours d'après la première question, et ceci même si X prend les valeurs 0 et 1, on a :

$$\boxed{Y=\frac{X^2+1}{2}}$$

Remarque. En effet, si X prend la valeur 0, cette égalité donne pour Y la valeur $\frac{1}{2}$, ce qui est correct, et si X prend la valeur 1, cette égalité donne pour Y la valeur 1, comme X, ce qui est encore correct.

b) Comme X^2 prend ses valeurs entre 0 et 1, alors X^2+1 prend ses valeurs entre 1 et 2 et Y prend ses valeurs entre $\frac{1}{2}$ et 1.

$$\boxed{Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},1\right]}$$

c) Pour tout x de $\left[\frac{1}{2},1\right]$, on a :

$F_Y(x)=P(Y\le x)=P\left(\frac{X^2+1}{2}\le x\right)=P\left(X^2+1\le 2x\right)=P\left(X^2\le 2x-1\right)$.

Comme $2x-1$ est positif, on obtient : $F_Y(x)=P\left(-\sqrt{2x-1}\le X\le\sqrt{2x-1}\right)$.

On a donc : $\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $F_Y(x)=F_X\left(\sqrt{2x-1}\right)-F_X\left(-\sqrt{2x-1}\right)$.

Pour finir, $-\sqrt{2x-1}$ est négatif donc $F_X\left(-\sqrt{2x-1}\right)$ est nul et $\sqrt{2x-1}$ appartient à $[0,1]$ donc $F_X\left(\sqrt{2x-1}\right)=\sqrt{2x-1}$. Ainsi, il reste :

$$\boxed{\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ F_Y(x)=\sqrt{2x-1}}$$

d) Si on complète la définition de F_Y, on obtient :

$$F_Y(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<\frac{1}{2}\\ \sqrt{2x-1} \text{ si } \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$$

On sait déjà que Y est une variable aléatoire (c'est admis par l'énoncé), il reste à vérifier deux conditions :

- F_Y est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

La continuité de F_Y sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ et sur $]1,+\infty[$ est acquise puisque la restriction de F_Y à ces intervalles est constante donc continue.

La continuité de F_Y sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$ est acquise puisque F_Y est polynomiale sur cet intervalle.

En $\frac{1}{2}$, on a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} F_Y(x) = F_Y(\frac{1}{2}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} 0 = 0$.

En 1, on a : $\lim\limits_{x\to 1^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} F_Y(x) = F_Y(1) = 0$.

Premier bilan : la fonction F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$.

- F_Y est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points (ici, en $\frac{1}{2}$ et en 1) ?

La classe C^1 de F_Y sur $\left]1,+\infty\right[$ et sur $\left]1,+\infty\right[$ est acquise puisque F_Y est constante sur ces intervalles.

La classe C^1 de F_Y sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$ est acquise puisque F_Y polynomiale sur cet intervalle.

Deuxième bilan : la fonction F_Y est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en $\frac{1}{2}$ et en 1.

On peut conclure :

$$\boxed{Y \text{ est une variable à densité}}$$

e) D'après la question 4a), on sait que : $Y = \frac{X^2+1}{2}$.

Montrons que X possède un moment d'ordre 2, ce qui garantira que Y possède une espérance.

Comme X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, une densité de X est la fonction f_X définie par :

$f_X(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Par conséquent, les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x^2 f_X(x)dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$ existent et sont nulles car la fonction intégrée est nulle, et l'intégrale $\int_0^1 x^2 f_X(x)dx$ existe car la fonction intégrée est continue sur $[0,1]$.

On peut conclure que X possède un moment d'ordre 2 et que :

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Par linéarité de l'espérance, on a : $E(Y) = \frac{1}{2}E(X^2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$.

Bilan :

$$\boxed{E(Y) = \frac{2}{3}}$$

f) La déclaration de fonction complétée est la suivante :

```
Function y : real ;
      Var u : real ;
   Begin
      u : = random ;
      y : = (sqr(u) + 1) / 2 ;
   End ;
```

5) a) D'après la première question, on a, pour tout ω de Ω :

$$Y(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} \text{ si } X(\omega)\le 0\\ \dfrac{X(\omega)^2+1}{2} \text{ si } 0<X(\omega)<1\\ X(\omega) \text{ si } X(\omega)\ge 1\end{cases}$$

On en déduit :

• Lorsque X prend des valeurs négatives ou nulles, Y prend la valeur $\dfrac{1}{2}$.

• Lorsque X prend des valeurs entre 0 et 1, Y prend des valeurs entre $\dfrac{1}{2}$ et 1 comme à la question 4b).

• Lorsque X prend des valeurs supérieures à 1, Y prend des valeurs supérieures à 1 (puisque Y et X prennent les mêmes valeurs).

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[}$$

b) En analysant précisément les trois points ci-dessus, on voit que Y prend la valeur $\dfrac{1}{2}$ si, et seulement si, X prend des valeurs négatives ou nulles.

On a donc : $P\left(Y=\dfrac{1}{2}\right)=P(X\le 0)=\Phi(0)$. Comme $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$\boxed{P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}}$$

c) Pour commencer, si $x<\dfrac{1}{2}$, on a : $F_Y(x)=0$.

Pour tout x supérieur ou égal à $\dfrac{1}{2}$, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X\le 0],[0<X\le 1],[X>1])$ s'écrit :

$$P(Y\le x)=P(X\le 0)+P([Y\le x]\cap[0<X\le 1])+P([Y\le x]\cap[X>1])$$

D'après l'étude faite à la question 5a), on obtient :

$$P(Y\le x)=P([Y\le x]\cap[X\le 0])+P\left(\left[\frac{X^2+1}{2}\le x\right]\cap[0<X\le 1]\right)+P([X\le x]\cap[X>1])$$

On a donc :

$$F_Y(x)=P(X\le 0)+P\left(\left[-\sqrt{2x-1}\le X\le\sqrt{2x-1}\right]\cap[0<X\le 1]\right)+P([X\le x]\cap[X>1])$$

$$F_Y(x)=P(X\le 0)+P\left(\max\left(-\sqrt{2x-1},0\right)<X\le\min\left(\sqrt{2x-1},1\right)\right)+P([X\le x]\cap[X>1])$$

Comme $-\sqrt{2x-1} \leq 0$, on peut simplifier la deuxième probabilité et on a :

$$F_Y(x) = P(X \leq 0) + P\left(0 < X \leq \min\left(\sqrt{2x-1}, 1\right)\right) + P\left([X \leq x] \cap [X > 1]\right)$$

À ce stade, il faut savoir si x est supérieur à 1 ou pas, afin de trancher pour la valeur du max mis en jeu dans la deuxième probabilité et pour savoir si la troisième probabilité est nulle ou pas.

• Si $x \leq 1$, alors $\min\left(\sqrt{2x-1}, 1\right) = \sqrt{2x-1}$ et $P\left([X \leq x] \cap [X > 1]\right) = 0$ donc :

$F_Y(x) = P(X \leq 0) + P\left(0 < X \leq \sqrt{2x-1}\right) = P\left(X \leq \sqrt{2x-1}\right) = \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right)$.

• Si $x > 1$, alors $\min\left(\sqrt{2x-1}, 1\right) = 1$ et $\left([X \leq x] \cap [X > 1]\right) = (1 < X \leq x)$ donc :

$F_Y(x) = P(X \leq 0) + P(0 < X \leq 1) + P(1 < X \leq x) = P(X \leq x) = \Phi(x)$.

Bilan :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \dfrac{1}{2} \\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) \text{ si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \Phi(x) \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

d) Comme $P\left(Y = \dfrac{1}{2}\right) \neq 0$, Y n'est pas une variable à densité et comme $Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, Y n'est pas une variable discrète.

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2014

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option économique

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (troisième exercice et problème comme l'année dernière).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme. Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé ce sujet équilibré, plus long, plus sélectif et, peut-être, plus déstabilisant que par le passé du fait de questions ouvertes pour lesquelles il était impossible de deviner la solution. Il a permis de bien apprécier les connaissances et les capacités à raisonner des candidats, ce qui est le premier but d'un texte de concours.

• **L'exercice 1** proposait l'étude de la diagonalisabilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on ne pouvait pas déterminer explicitement les valeurs propres. La fin consistait en la détermination du commutant de A.

Cet exercice a montré diverses carences chez pas mal de candidats :
La différence entre famille génératrice et base est mal maîtrisée.
La preuve que deux propositions sont équivalentes est difficile à faire rigoureusement.
Les calculs numériques usuels posent de gros problèmes.

• **L'exercice 2** avait pour objectif d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$, puis d'en déterminer un équivalent au voisinage de 0.

Cet exercice a révélé les failles de certains candidats, en ce qui concerne l'existence et la classe C^1 de fonctions de ce type, ainsi que la très mauvaise maîtrise des inégalités.

• **L'exercice 3**, portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance du paramètre θ de la loi d'une variable aléatoire X, loi qui était donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^n$.

Cet exercice a montré clairement que, dès que les expressions à manipuler dépassent un certain gabarit, les candidats abandonnent très vite (question 3a).

• **Le problème**, portant aussi sur le programme de probabilités, mais sur la partie "variables à densité", avait pour but d'étudier une variable aléatoire Y définie en fonction d'une variable aléatoire X par :

$$Y(\omega)=\int_0^1 \max(X(\omega),t)\,dt$$

Le problème a impressionné de nombreux candidats du moins dans les deux premières questions, mais comme les résultats pénibles à établir étaient donnés, les plus valeureux ont pu (et souvent de belle manière) tirer leur épingle du jeu dans la suite.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3624 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,08 sur 20 (inférieure de 0,33 point à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 6,24 (un peu supérieur à celui de l'année dernière).

• 43 % des candidats ont une note strictement inférieure à 8, en augmentation de 4 points par rapport à l'année dernière (dont presque la moitié, 20% du total, obtiennent une note inférieure à 4).
• 19 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (stable)
• 23,6 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (stable).

Conclusion :

Le niveau moyen est moins élevé que l'année dernière à cause d'un nombre encore plus important de copies très faibles (330 copies ont moins de 2 sur 20 contre 250 l'année dernière) et peut-être aussi du nombre plus important de candidats (3624 contre 3301 l'année dernière) : peut-être n'étaient-ils pas tous tout à fait prêts.
L'épreuve était, comme par le passé, exigeante, et beaucoup de candidats s'en sortent avec les honneurs (les correcteurs les félicitent), mais il faut tout de même noter qu'un nombre considérable d'entre eux sont incapables de calculer le discriminant d'une équation du second degré, confondent famille génératrice et base, inversibilité et diagonalisabilité, théorème d'encadrement avec théorème de comparaison (classiques pourtant vus et revus au cours des deux années de prépa), de plus beaucoup dérivent de travers et ne maîtrisent ni la notion de fonctions équivalentes, ni la manipulation d'inégalités.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées malgré la présence d'un nombre assez élevé de candidats qui ne respectent pas la numérotation des questions, écrivent mal (ce sont souvent les mêmes) et rendent la tâche du correcteur pénible : qu'ils sachent qu'ils n'ont rien à gagner à pratiquer de la sorte, bien au contraire.
Il reste toujours un noyau de candidats qui ne peuvent s'empêcher de faire du remplissage au lieu d'argumenter face aux questions dont le résultat est donné : aucun correcteur n'est dupe, rappelons-le.

Cette année, nous notons une forte recrudescence de candidats ayant osé suggérer à tort que l'énoncé était bancal ou faux (ceci s'expliquant par le fait que les candidats en question ne savaient pas suffisamment bien leur cours) : ces candidats donnent d'eux une image très négative et montrent qu'ils manquent sérieusement d'humilité : qu'en sera-t-il en école, puis en entreprise ?

Précisons pour les futurs candidats qu'ils ne sont pas obligés de recopier les énoncés des questions avant de les traiter et qu'ils ne sont pas, non plus, obligés de recopier tout un programme d'informatique si la question posée était seulement de compléter quelques instructions manquantes.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.