EDHEC BUSINESS SCHOOL

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

5 mai 2015 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document, seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4,\ e_1 + e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2) On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.

b) En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.

c) Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.

3) a) Établir la relation suivante : $D(D+I)(D-3I) = 0$.

b) En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C.

4) On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

a) En utilisant les racines de P, déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

b) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout entier naturel n non nul, de C^n en fonction de C et C^2.

5) Compléter, à l'aide de matrices de type `zeros` et `ones`, les deux espaces laissés libres dans la commande `Scilab` suivante pour qu'elle permette de construire la matrice C.

```
C = [ones(1,5);------,------;ones(1,5)]
```

Exercice 2

Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux guichets tandis que C attend que l'un de ces deux guichets se libère pour se faire servir.

On suppose que :

• Les durées de passage au guichet des trois personnes A, B et C sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes, notées respectivement X, Y et Z, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1[$.

• La durée du changement de personne à un guichet est négligeable.

1) On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$ et on admet que U et V sont des variables aléatoires.

a) Montrer que la fonction de répartition F_U de U est définie par : $F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2x - x^2 \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

b) En déduire que U est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_U de U.

c) Déterminer l'espérance et la variance de U.

2) On note T le temps total passé par C dans l'agence bancaire.

a) Exprimer T en fonction de certaines des variables précédentes.

b) En déduire $E(T)$ et $V(T)$.

3) a) On rappelle que, si `a` et `b` sont deux vecteurs lignes de taille n, les commandes `m = min(a,b)` et `M = max(a,b)` renvoient les vecteurs `m` et `M`, de même taille que `a` et `b`, et tels que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on ait : `m(i) = min(a(i), b(i))` et `M(i) = max(a(i), b(i))`.

On rappelle également que `grand(1,n,'unf',0,1)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.

Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles permettent de simuler n fois les variables aléatoires U, V et T, pour n entré par l'utilisateur :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
x = grand(1,n,'unf',0,1)
y = grand(1,n,'unf',0,1)
z = grand(1,n,'unf',0,1)
u = ------ ; disp(u, 'u = ')
v = ------ ; disp(v, 'v = ')
t = ------ ; disp(t, 't = ')
```

b) Que représente l'événement $(T \ge V)$?

c) On souhaite déterminer une valeur approchée de la probabilité $p = P(T \ge V)$ en simulant un grand nombre de fois le passage des clients A, B et C aux guichets.

Compléter les commandes `p = ------ ; disp(p, 'p = ')` pour que, placées sous les commandes écrites à la question 3a), elles permettent d'obtenir une valeur approchée de p.

d) Lors de plusieurs essais des commandes ci-dessus, avec $n = 10000$, la réponse donnée par `Scilab` est comprise entre 0.66 et 0.67. Que peut-on conjecturer quant à la valeur exacte de p ?

Exercice 3

1) Pour tout entier naturel k, on pose :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$$

a) Justifier que I_0, I_1 et I_2 sont des intégrales convergentes et donner leur valeur (on pourra s'appuyer sur le cours de probabilité).

b) Pour tout réel a positif et tout entier naturel k, on pose : $I_k(a) = \int_0^a t^k e^{-t}\,dt$.

Établir, grâce à une intégration par parties, que : $I_{k+1}(a) = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}$.

c) En déduire que I_3 et I_4 sont des intégrales convergentes et vérifier que : $I_3 = 6$ et $I_4 = 24$.

2) Déduire des questions précédentes que, pour tout couple (x, y) de réels, $\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ est une intégrale convergente.

On considère, pour toute la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$$

3) a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$.

b) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

4) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis déterminer le seul point critique (a, b) de f.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a, b)$ de f en son point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a, b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a, b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.

5) Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.

a) Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \cdots$$

b) Compléter de même l'égalité : $\dfrac{y^2}{2} - 2y + 6 = \dfrac{1}{2}(y-2)^2 + \cdots$

c) En déduire une autre écriture de $f(x, y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1) a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}$, $0 \le \int_0^x \dfrac{t^m}{1-t^2} dt \le \dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{m+1}$.

b) En déduire que: $\lim\limits_{m \to +\infty} \int_0^x \dfrac{t^m}{1-t^2} = 0$.

2) a) Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum\limits_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

b) En déduire que : $\sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \dfrac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \dfrac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

c) Utiliser la question 1) pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt$.

Partie 2

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne "pile" avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier "pile".

Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que ce joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur a gagné ».

On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1) Reconnaître la loi de N.

2) a) Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

b) Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent N et X puis renvoient l'un des deux messages : « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
p = input('donner la valeur de p')
N = grand(1,1,'geom',---)//'geom' désigne une loi géométrique
X = grand(1,1,'uin',---)//'uin' désigne une loi uniforme discrète
if ------ then disp('------'), else disp('------'), end
```

3) a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $P_{(N=2j)}\left(X = 2k+1\right)$.

b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}\left(X = 2k+1\right)$.

c) Déterminer $P_{(N=2j)}\left(X = 2k+1\right)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.

d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}\left(X = 2k+1\right)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

4) a) Justifier que $P\left(X = 2k+1\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(N = n\right) P_{(N=n)}\left(X = 2k+1\right)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P\left(X = 2k+1\right) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)$$

b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P\left(X = 2k+1\right) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt$.

5) a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt = 0$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \right)$.

c) En déduire que : $P\left(A\right) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt$.

6) a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q.

c) En déduire que $P\left(A\right) > \dfrac{1}{2}$.

Corrigé

Exercice 1 ....

1) a) Comme $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base de $\mathbb{R}^5$, on sait d'après le cours que :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1),\ f(e_2),\ f(e_3),\ f(e_4),\ f(e_5))$$

Comme de plus, on a $f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = f(e_5)$, il reste :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1),\ f(e_2))$$

En remplaçant $f(e_1)$ et $f(e_2)$ par leurs expressions, on obtient :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_5)$$

De plus, les vecteurs $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = (1,1,1,1,1)$ et $e_1 + e_5 = (1,0,0,0,1)$ ne sont pas colinéaires donc la famille $(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_5)$ est libre et c'est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

$$\boxed{\dim \operatorname{Im}(f) = 2}$$

Pour finir, on a $e_2 + e_3 + e_4 = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) - (e_1 + e_5)$ donc, comme $\operatorname{Im}(f)$ est un espace vectoriel, $e_2 + e_3 + e_4$ appartient à $\operatorname{Im}(f)$.

Les vecteurs $e_2 + e_3 + e_4 = (0,1,1,1,0)$ et $e_1 + e_5 = (1,0,0,0,1)$ ne sont pas colinéaires donc la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Im}(f)$, et comme $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$, c'est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

On peut conclure :

$$\boxed{(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f)}$$

b) Grâce au théorème du rang, comme $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$, on a : $\dim \operatorname{Ker}(f) = 3$.

On a remarqué plus haut que $f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = f(e_5)$, ce qui montre que :

$$f(e_2) - f(e_3) = 0,\ f(e_2) - f(e_4) = 0 \text{ et } f(e_2) - f(e_5) = 0$$

Par linéarité de *f*, on a donc : $f(e_2 - e_3) = 0$, $f(e_2 - e_4) = 0$ et $f(e_2 - e_5) = 0$, ce qui prouve que $e_2 - e_3$, $e_2 - e_4$ et $e_2 - e_5$ sont trois vecteurs de $\operatorname{Ker}(f)$. Il reste à vérifier qu'ils forment une famille libre. Soit donc trois réels *a*, *b* et *c* tels que :

$$a(e_2 - e_3) + b(e_2 - e_4) + c(e_2 - e_5) = 0$$

Cette égalité s'écrit : $(a + b + c)e_2 - ae_3 - be_4 - ce_5 = 0$ et comme la famille (e_2, e_3, e_4, e_5) est une famille libre en tant que sous famille de la base

$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, on obtient : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$, ce qui prouve la liberté de la famille $(e_2-e_3,\ e_2-e_4,\ e_2-e_5)$.

Conclusion :

$$\boxed{(e_2-e_3,\ e_2-e_4,\ e_2-e_5) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f)}$$

Remarque. On pouvait aussi rechercher $\mathrm{Ker}(f)$ en résolvant le système $CX=0$.

2) a) Avec $u=e_2+e_3+e_4$ et $v=e_1+e_5$, on a, par linéarité de *f* :

- $f(u)=f(e_2)+f(e_3)+f(e_4)=3f(e_2)=3e_1+3e_5$.
- $f(v)=f(e_1)+f(e_5)=3f(e_2)=(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5)+(e_1+e_5)$

$f(v)=2e_1+e_2+e_3+e_4+2e_5$.

Toujours par linéarité de *f*, on en déduit :

- $f(u-v)=f(u)-f(v)=3e_1+3e_5-(2e_1+e_2+e_3+e_4+2e_5)$.

$f(u-v)=e_1+e_5-e_2-e_3-e_4=v-u=-1(u-v)$.

- $f(u+3v)=f(u)+3f(v)=3e_1+3e_5+3(2e_1+e_2+e_3+e_4+2e_5)$.

$f(u+3v)=9(e_1+e_5)+3(e_2+e_3+e_4)=9v+3u=3(u+3v)$.

b) Les égalités ci-dessus prouvent que -1 et 3 sont des valeurs propres de *f* associées à des sous-espaces propres de dimensions au moins égales à 1 (car $u-v$ et $u+3v$ ne sont pas nuls).

Comme 0 est valeur propre de *f* associé au sous-espace propre $\mathrm{Ker}(f)$ qui est de dimension 3, on est certain que -1 et 3 sont des valeurs propres de *f* associées à des sous-espaces propres de dimensions exactement égales à 1 (puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas excéder la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$).

Par conséquent, les valeurs propres de *f* sont -1, 0 et 3 et, en notant $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ, on a :

$$\boxed{\begin{gathered} E_{-1}(f)=\mathrm{Vect}(u-v) \\ E_0(f)=\mathrm{Vect}(e_2-e_3,\ e_2-e_4,\ e_2-e_5) \\ E_3(f)=\mathrm{Vect}(u+3v) \end{gathered}}$$

c) La somme des dimensions des sous-espaces propres de *f* est égale à la dimension de $\mathbb{R}^5$ donc *f* est diagonalisable, ce qui prouve que *C* est aussi diagonalisable.

D'après la question 2b), et grâce à la formule de changement de base, on a $C = R\,D\,R^{-1}$, avec par exemple, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et

$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, où les colonnes de R sont, de gauche à droite, les coordonnées des vecteurs de base de $E_{-1}(f)$, $E_0(f)$ et $E_3(f)$ dans la base $\mathcal{B}$.

3) a) Un calcul simple donne :

$$D(D+I)(D-3I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(D+I)(D-3I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On conclut :

$$\boxed{D(D+I)(D-3I) = 0}$$

b) On a $D(D+I)(D-3I) = 0$, ce qui s'écrit en développant : $D^3 - 2D^2 - 3D = 0$. Par conséquent, le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de D donc aussi de f et de C.

4) a) Les racines de P sont 0, –1 et 3 et, en donnant successivement à X ces trois valeurs, on obtient : $\begin{cases} c_n = 0 \ \text{(car } n \geq 1) \\ a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \end{cases}$.

En remplaçant c_n par 0, on trouve alors : $\begin{cases} c_n = 0 \\ a_n - b_n = (-1)^n \\ 9a_n + 3b_n = 3^n \end{cases}$. Ce système équivaut,

après la transformation $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$, à : $\begin{cases} c_n = 0 \\ a_n - b_n = (-1)^n \\ 12a_n = 3^n + 3(-1)^n \end{cases}$. On a donc :

$$\begin{cases} c_n = 0 \\ b_n = a_n - (-1)^n \\ 12a_n = 3^n + 3(-1)^n \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{a_n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{12},\ b_n = \frac{3^n - 9(-1)^n}{12} \text{ et } c_n = 0}$$

b) En appliquant la relation $X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$ à la matrice C, on obtient :

$$C^n = (C^3 - 2C^2 - 3C)Q_n(C) + a_nC^2 + b_nC + c_nI$$

Comme $C^3 - 2C^2 - 3C = 0$, on obtient, en remplaçant a_n, b_n et c_n par leur expression :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C^n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{12}C^2 + \frac{3^n - 9(-1)^n}{12}C}$$

5) La commande `Scilab` proposée donne la première et la dernière ligne de la matrice C donc pour la compléter correctement, il faut donner les 3 lignes manquantes en concaténant une colonne de 3 éléments égaux à 1 et une matrice à 3 lignes et 4 colonnes dont tous les éléments sont nuls. On obtient donc :

```
C=[ones(1,5);ones(3,1),zeros(3,4);ones(1,5)]
```

Exercice 2 ....

1) a) Comme U prend la plus petite des valeurs prises par X et Y, dire que U prend une valeur strictement supérieure à x, c'est dire que X et Y prennent une valeur strictement supérieure à x. On a donc : $(U > x) = (X > x) \cap (Y > x)$.

Par indépendance de X et Y, on obtient : $P(U > x) = P(X > x)P(Y > x)$

En notant F la fonction de répartition commune à X et Y, on a :

$$P(U > x) = (1 - F(x))^2$$

Il reste à remplacer $F(x)$ par son expression, ce qui donne :

$$P(U>x)=\begin{cases}1 \text{ si } x<0\\(1-x)^2 \text{ si } 0\leq x\leq 1\\0 \text{ si } x>1\end{cases}$$

On en déduit : $F_U(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\1-(1-x)^2=2x-x^2 \text{ si } 0\leq x\leq 1\\1 \text{ si } x>1\end{cases}$.

b) • La fonction F_U est continue et de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ puisqu'elle est constante sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$ et polynomiale sur $]0,1[$.

• En 0, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} F_U(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 0=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} F_U(x)=F_U(0)=0$ donc F_U est continue en 0.

• En 1, on a $\lim\limits_{x\to 1^-} F_U(x)=F_U(1)=1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} F_U(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1$ donc F_U est continue en 1.

Bilan : la fonction F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1 donc :

$$\boxed{U \text{ est une variable à densité}}$$

On trouve une densité f_U de U en dérivant F_U, sauf en 0 et en 1 (puisque l'on ne sait pas si F_U est dérivable en ces points) :

$$f_U(x)=\begin{cases}2-2x \text{ si } 0<x<1\\0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à poser, par exemple, $f_U(0)=2$ et $f_U(1)=0$, ce qui donne :

$$f_U(x)=\begin{cases}2-2x \text{ si } 0\leq x\leq 1\\0 \text{ sinon}\end{cases}$$

c) La fonction $x\mapsto x\,f_U(x)$ est nulle ailleurs que sur $[0,1]$ donc $\int_{-\infty}^{0} x\,f_U(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x\,f_U(x)\,dx$ sont nulles. De plus, sa restriction à l'intervalle $[0,1]$ est continue sur $[0,1]$ donc U possède une espérance et on a :

$$E(U)=\int_0^1 x\,f_U(x)\,dx=\int_0^1 (2x-2x^2)\,dx=\left[x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

De même, la fonction $x \mapsto x^2 f_U(x)$ est nulle ailleurs que sur $[0,1]$ et sa restriction à l'intervalle $[0,1]$ est continue sur $[0,1]$ donc U possède un moment d'ordre 2 et on a :

$$E(U^2) = \int_0^1 x^2 f_U(x)\,dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Pour finir, la variance de U est donnée par :

$$V(U) = E(U^2) - (E(U))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

2) a) Le temps total T passé par C dans l'agence bancaire est la somme du temps mis par le plus rapide des deux clients A et B (c'est le temps d'attente de C) et du temps de passage de C au guichet.
On a donc :

$$\boxed{T = U + Z}$$

b) Par linéarité de l'espérance, on a : $E(T) = E(U) + E(Z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$.

$$\boxed{E(T) = \frac{5}{6}}$$

Z est indépendante de X et Y, donc elle est indépendante de U (lemme des coalitions) et on a :

$$V(T) = V(U) + V(Z) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12}$$

$$\boxed{V(T) = \frac{5}{36}}$$

3) a) On peut proposer les commandes suivantes :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
x = grand(1,n,'unf',0,1)
y = grand(1,n,'unf',0,1)
z = grand(1,n,'unf',0,1)
u = min(x,y) ; disp(u, 'u = ')
v = max(x,y) ; disp(v, 'v = ')
t = u+z ; disp(t, 't = ')
```

b) Comme T est le temps total passé par C dans l'agence et comme V est le temps mis par la plus lente des deux personnes A et B, l'événement $(T \geq V)$ s'énonce en français : « le client C sort en dernier de l'agence ».

c) On approche la probabilité de l'événement $(T \geq V)$ par sa fréquence d'apparition lors d'un grand nombre d'épreuves indépendantes (c'est la loi faible des grands nombres qui l'autorise) donc les commandes manquantes sont les suivantes :

```
p = sum(t>=v)/n ; disp(p, 'p = ')
```

d) Il ne semble pas totalement fou de penser que la valeur exacte de p est $\frac{2}{3}$.

Exercice 3 ....

1) a) Si l'on considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1, on sait qu'une densité de X est la fonction h définie par :

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \text{ converge et vaut } 1}$$

De plus, on sait que X admet une espérance et un moment d'ordre 2 définis par :
$E(X) = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ et $E(X^2) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$
Comme $E(X) = 1$, on en déduit :

$$\boxed{I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt \text{ converge et vaut } 1}$$

De plus, on sait que $V(X) = 1$ d'où $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 1 + 1 = 2$ donc :

$$\boxed{I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt \text{ converge et vaut } 2}$$

b) Pour tout réel a positif, on a : $I_{k+1}(a) = \int_0^a t^{k+1} e^{-t} dt$.

En posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-t}$, on a $u'(t) = (k+1)t^k$ et on peut choisir $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, a]$ donc l'intégration par parties est licite et donne : $I_{k+1}(a) = \left[-t^{k+1} e^{-t}\right]_0^a + (k+1)\int_0^a t^{k+1} e^{-t} dt$.

On a donc :

$$\boxed{I_{k+1}(a) = (k+1) I_k(a) - a^{k+1} e^{-a}}$$

c) Avec $k = 2$, on a : $I_3(a) = 3I_2(a) + a^3 e^{-a}$

Par croissances comparées, on a $\lim_{a\to+\infty} a^3e^{-a} = 0$ et comme $\lim_{a\to+\infty} I_2(a) = I_2$, on peut conclure que I_3 converge et, après passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{I_3 = 3I_2 = 6}$$

De même, avec $k = 3$, on a : $I_4(a) = 4I_3(a) + a^4e^{-a}$.
Par croissances comparées, on a $\lim_{a\to+\infty} a^4e^{-a} = 0$ et comme $\lim_{a\to+\infty} I_3(a) = I_3$, on peut conclure que I_4 converge.
Après passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{I_4 = 4I_3 = 24}$$

2) En développant la fonction intégrée dans l'intégrale proposée on trouve :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (y+xt+t^2)^2e^{-t} = \left(y^2+x^2t^2+t^4+2xyt+2yt^2+2xt^3\right)e^{-t}$$
$$= y^2e^{-t}+2xyte^{-t}+\left(x^2+2y\right)t^2e^{-t}+2xt^3e^{-t}+t^4e^{-t}.$$

Comme $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$, $I_1 = \int_0^{+\infty} t\,e^{-t}dt$, $I_2 = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$, $I_3 = \int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt$ et $I_4 = \int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt$ sont des intégrales convergentes, $\int_0^{+\infty}(y+xt+t^2)^2e^{-t}dt$ converge en tant que combinaison linéaire d'intégrales convergentes.

3) a) D'après ce qui précède, on a :

$$f(x,y) = \int_0^{+\infty} y^2e^{-t}dt + 2xy\int_0^{+\infty} te^{-t}dt + \left(x^2+2y\right)\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt + 2x\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt$$
$$+\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt$$

En remplaçant les intégrales I_0, I_1, I_2, I_3 et I_4 par leurs valeurs, on trouve en ordonnant :

$$\boxed{f(x,y) = 2x^2+y^2+12x+4y+2xy+24}$$

b) La fonction *f* est polynomiale donc elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

4) a) Les points critiques de *f* sont les couples (x,y) en lesquels le gradient de *f* s'annule, c'est-à-dire en lesquels les dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent simultanément.
Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\partial_1(f)(x,y) = 4x+2y+12 \text{ et } \partial_2(f)(x,y) = 2x+2y+4$$

Les points critiques de *f* sont les solutions du système : $\begin{cases} 4x+2y+12=0 \\ 2x+2y+4=0 \end{cases}$.

En simplifiant par 2, on obtient : $\begin{cases} 2x+y+6=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$.

Avec la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, ce système équivaut à : $\begin{cases} x+4=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$.

On trouve donc $x=-4$ et ensuite $y=2$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Le seul point critique de } f \text{ est } (-4, 2)}$$

b) Les dérivées secondes de f en ce point sont :

$\partial^2_{1,1}(f)(-4,2)=4$, $\partial^2_{1,2}(f)(-4,2)=\partial^2_{2,1}(f)(-4,2)=2$ et $\partial^2_{2,2}(f)(-4,2)=2$.

La hessienne de f en ce point est $\nabla^2(f)(-4,2)=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et ses valeurs propres sont les réels λ pour lesquels la matrice $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Ceci équivaut à $(4-\lambda)(2-\lambda)-2\times 2=0$, c'est-à-dire : $\lambda^2-6\lambda+4=0$. Après calcul du discriminant Δ qui vaut 20, on a $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{5}$ et on trouve que les deux valeurs propres de $\nabla^2(f)$ sont : $\lambda_1=3+\sqrt{5}$ et $\lambda_2=3-\sqrt{5}$.

Les valeurs propres de $\nabla^2(f)$ sont strictement positives (puisque $\sqrt{5}<\sqrt{9}=3$) donc f présente un minimum local au point (–4, 2).

Comme $f(x,y)=2x^2+y^2+12x+4y+2xy+24$, en notant m ce minimum, on trouve : $m=f(-4,2)=2\times(-4)^2+2^2+12\times(-4)+4\times 2+2\times(-4)\times 2+24$.

$m=32+4-48+8-16+24=4$.

Conclusion :

$$\boxed{m=4}$$

5) a) On a :

$$2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2=2\left(x^2+\frac{y^2}{4}+9+xy+6x+3y\right)=2x^2+\frac{y^2}{2}+18+2xy+12x+6y$$

Par conséquent, on obtient :

$$\boxed{2x^2+2xy+12x=2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2-18-6y-\frac{y^2}{2}}$$

b) On a : $\frac{1}{2}(y-2)^2=\frac{1}{2}(y^2-4y+4)=\frac{y^2}{2}-2y+2$

Par conséquent, on obtient :

$$\boxed{\frac{y^2}{2}-2y+6=\frac{1}{2}(y-2)^2+4}$$

c) On sait depuis la question 2b) que :

$$f(x,y)=2x^2+12xy+2x+y^2+4y+24$$

De la question 4a), on déduit successivement :

$$f(x,y)=2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2-18-6y-\frac{y^2}{2}+y^2+4y+24.$$

$$f(x,y)=2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2+\frac{y^2}{2}-2y+6.$$

Grâce à la question 4b), on a enfin : $f(x,y)=2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2+\frac{1}{2}(y-2)^2+4$

Comme la somme $2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2+\frac{1}{2}(y-2)^2$ est positive, on conclut :

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\geq 4}$$

Cette relation prouve que 4 est le minimum global de f et on sait, d'après la question 4b), qu'il est atteint au point $(-4, 2)$.

Problème ....

Partie 1

1) a) Pour tout t de $[0,x]$, on a : $0\leq t^2\leq x^2$ (par croissance de la fonction "carré" sur $\mathbb{R}_+$).

On en déduit $1-x^2\leq 1-t^2\leq 1$ puis, comme $1-x^2>0$, on a, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $1\leq\frac{1}{1-t^2}\leq\frac{1}{1-x^2}$. En multipliant par $t^m\geq 0$, on a $t^m\leq\frac{t^m}{1-t^2}\leq\frac{t^m}{1-x^2}$ et comme $t^m\geq 0$, on peut élargir et écrire : $0\leq\frac{t^m}{1-t^2}\leq\frac{t^m}{1-x^2}$.

En intégrant ces fonctions continues de 0 à x, bornes dans l'ordre croissant, on obtient :

$$\boxed{0\leq\int_0^x\frac{t^m}{1-t^2}dt\leq\frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{m+1}}$$

b) On a $\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m+1}=0$ donc, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\int_0^x\frac{t^m}{1-t^2}=0}$$

2) a) On a $\sum_{j=0}^{k-1}t^{2j}=\sum_{j=0}^{k-1}\left(t^2\right)^j$ et, comme t appartient à $]0,1[$, alors $t^2\neq 1$ et on obtient : $\sum_{j=0}^{k-1}t^{2j}=\frac{1-\left(t^2\right)^k}{1-t^2}$. En arrangeant, ceci s'écrit :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$$

b) En intégrant l'égalité précédente entre 0 et x (les fonctions sont continues sur $[0,x]$ car $1-t^2 \neq 0$), on a : $\int_0^x \sum_{j=1}^{k} t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2} dt$

Par linéarité de l'intégration, on obtient : $\sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt}$$

c) D'après la question 1), avec $m = 2k$, on sait que $\lim_{k \to +\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt = 0$, ce qui prouve que $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ possède une limite finie égale à $\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$ lorsque k tend vers $+\infty$. En d'autres termes, la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et sa somme est :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt}$$

d) Pour tout entier naturel k, on a : $\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$.

En remplaçant, on trouve, grâce à la question 2c) :

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \left(\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt \right)$$

On peut conclure :

$$\boxed{\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt}$$

Partie 2

1) Comme N est la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier "pile" lors de lancers indépendants donnant "pile" avec la probabilité p, le cours enseigne que :

$\boxed{N \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p}$

2) a) • Si m est pair, alors $m = 2k$, où k est un entier. Dans ce cas, `2*floor(m/2)` renvoie $2\left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor$, c'est-à-dire $2\lfloor k \rfloor$, soit $2k$, c'est-à-dire m.

• Si m est impair, alors $m = 2k + 1$, où k est un entier. Dans ce cas, `2*floor(m/2)` renvoie $2\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor$, c'est-à-dire $2\left\lfloor k+\frac{1}{2} \right\rfloor$, soit $2k$, qui est différent de m.

On a donc montré que `2*floor(m/2)` ne renvoie la valeur m que lorsque m est pair.

b) Comme N suit la loi géométrique de paramètre p et comme la loi de X, conditionnellement à l'événement $(N = n)$ est la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, on a :

```
p = input('donner la valeur de p'),
N = grand(1,1,'geom',p),
X = grand(1,1,'uin',1,N),
if X == 2*floor(X/2) then disp('le joueur a perdu'),
                    else disp('le joueur a gagné'),
end,
```

3) a) Si k est supérieur ou égal à j, alors $2k+1 \geq 2j+1 > 2j$ donc il est impossible de piocher la boule numérotée $2k+1$ car elle ne se trouve pas dans l'urne qui ne contient que les boules numérotées 1, 2, …, $2j$ (car on suppose l'événement $(N = 2j)$ réalisé).

On a donc :

$$\boxed{P_{(N=2j)}\left(X = 2k+1\right) = 0}$$

b) Si k est supérieur ou égal à $j+1$, alors $2k+1 \geq 2j+3 > 2j+1$ donc il est impossible de piocher la boule numérotée $2k+1$ car elle ne se trouve pas dans l'urne qui ne contient que les boules 1, 2, …, $2j+1$ (car on suppose l'événement $(N = 2j+1)$ réalisé).

On a donc :

$$\boxed{P_{(N=2j+1)}\left(X = 2k+1\right) = 0}$$

c) Si k appartient à $[\![0,\ j-1]\!]$, on a $1 \leq 2k+1 \leq 2j-1$ donc la boule numérotée $2k+1$ est dans l'urne puisque l'urne contient les boules numérotées 1, 2, …, $2j$ du fait de la réalisation de $(N = 2j)$.

On a donc $2j$ boules dans l'urne et une seule favorable à l'événement $(X = 2k+1)$, d'où :

$$\boxed{P_{(N=2j)}\left(X = 2k+1\right) = \frac{1}{2j}}$$

d) Si k appartient à $[\![0, j]\!]$, on a $1 \leq 2k+1 \leq 2j+1$ donc la boule numérotée $2k+1$ est dans l'urne puisque l'urne contient les boules numérotées 1, 2, …, $2j+1$ du fait de la réalisation de $(N = 2j+1)$.
On a donc $2j+1$ boules dans l'urne et une seule favorable à l'événement $(X = 2k+1)$, d'où :

$$\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j+1}}$$

4) a) En écrivant la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements de probabilités non nulles $(N = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(X = 2k+1)$$

L'énoncé donnant le droit de scinder cette somme en séparant les n pairs des n impairs, on obtient :

$$P(X = 2k+1) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j) P_{(N=2j)}(X = 2k+1) + \sum_{j=0}^{+\infty} P(N = 2j+1) P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$$

Dans la première somme, les termes correspondant à $j \leq k$ sont nuls d'après la question 3a) et dans la deuxième somme, les termes correspondant à $j \leq k-1$ sont nuls d'après la question 3b). Il reste donc :

$$P(X = 2k+1) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(N = 2j) P_{(N=2j)}(X = 2k+1) + \sum_{j=k}^{+\infty} P(N = 2j+1) P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$$

D'après la question 3c), on a :

$$P(N = 2j) P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = q^{2j-1} p \times \frac{1}{2j} = \frac{p}{q} \times \frac{q^{2j}}{2j}$$

D'après la question 3d), on a :

$$P(N = 2j+1) P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = q^{2j} p \times \frac{1}{2j+1} = \frac{p}{q} \times \frac{q^{2j+1}}{2j+1}$$

En remplaçant, on trouve :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)}$$

b) Grâce à la question 2d) de la partie 1, en remplaçant x par q, on sait que :

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt \text{ et } \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} = \int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$$

On en déduit, par linéarité de l'intégration :

$$P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt + \int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt\right) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k} + t^{2k+1}}{1-t^2} dt$$

$$P(X=2k+1)=\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}(1+t)}{(1-t)(1+t)}dt$$

En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}\,,\ P(X=2k+1)=\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt}$$

5) a) Pour tout t de $[0,q]$, on a : $1-q\le 1-t\le 1$ et par croissance de la fonction "carré" sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit : $(1-q)^2\le(1-t)^2\le 1$.

D'autre part, on a aussi : $1\le 1+t\le 1+q$.

En multipliant ces deux derniers encadrements membre à membre, on obtient :

$$(1-q)^2\le(1-t)^2(1+t)\le 1+q$$

Comme $(1-q)^2>0$, on peut prendre les inverses :

$$\frac{1}{1+q}\le\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\le\frac{1}{(1-q)^2}$$

En multipliant par $t^{2n+2}\ge 0$, on trouve :

$$\frac{t^{2n+2}}{1+q}\le\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\le\frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}$$

Comme $\dfrac{t^{2n+2}}{1+q}$ est positif, on peut élargir à gauche :

$$0\le\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\le\frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}$$

Il reste à intégrer entre 0 et q ces fonctions continues, ce qui donne :

$$0\le\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\le\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}dt$$

En calculant l'intégrale de gauche, on trouve :

$$0\le\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\le\frac{1}{(1-q)^2}\times\frac{q^{2n+3}}{2n+3}$$

Comme q est inférieur à 1, on peut élargir encore :

$$0\le\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\le\frac{1}{(1-q)^2}\times\frac{1}{2n+3}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+3}=0$ donc, par encadrement, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt=0}$$

b) D'après la question 4b), on a : $\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\sum_{k=0}^{n}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt$. Par linéarité de l'intégration, on a alors, grâce à une technique analogue à celle utilisée à la question 2a) :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\,dt = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{1-t}\times\frac{1-t^{2n+2}}{(1-t^2)}dt = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}dt$$

En remarquant que $(1-t)(1-t^2)=(1-t)(1-t)(1+t)=(1-t)^2(1+t)$, et toujours par linéarité de l'intégration, on a finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)}$$

c) L'événement A est l'événement «le joueur a gagné » et A est réalisé si et seulement si le joueur obtient **un** numéro impair (pas seulement **le** numéro $2k+1$) donc on a :

$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=2k+1)$$

Les événements $(X=2k+1)$ sont 2 à 2 incompatibles donc :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1)$$

Grâce aux questions 5a) et 5b), on obtient :

$$\boxed{P(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt}$$

6) a) Pour tout t différent de 1 et de -1, on a :

$$\frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}+\frac{c}{(1-t)^2} = \frac{a(1+t)(1-t)+b(1-t)^2+c(1+t)}{(1+t)(1-t)^2} = \frac{a+b+c+(c-2b)t+(b-a)t^2}{(1+t)(1-t)^2}$$

On a $\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}+\frac{c}{(1-t)^2}$ si et seulement si :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a+b+c+(c-2b)t+(b-a)t^2}{(1+t)(1-t)^2}$$

En identifiant les coefficients des numérateurs, on obtient le système (S) : $\begin{cases} a+b+c=1 \\ c-2b=0 \\ b-a=0 \end{cases}$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ c=2b \\ b=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ c=2a \\ b=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=1 \\ c=2a \\ b=a \end{cases}.$$

On a donc : $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$ et $c=\dfrac{1}{2}$.

Conclusion :

$$\boxed{\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{2}{(1-t)^2}\right)}$$

b) D'après la question 5c), on a : $P(A)=\dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt$. En utilisant la question 6a), avec t élément de $[0,q]$, on a bien t différent de -1 et de 1, ceci devient :

$$P(A)=\frac{p}{4q}\int_0^q\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{2}{(1-t)^2}\right)dt=\frac{p}{4q}\left[-\ln|1-t|+\ln|1+t|+\frac{2}{1-t}\right]_0^q$$

En calculant le crochet, on trouve : $P(A)=\dfrac{p}{4q}\left(-\ln|1-q|+\ln|1+q|+\dfrac{2}{1-q}-2\right)$.

En arrangeant un peu, on obtient : $P(A)=\dfrac{p}{4q}\left(\ln\left|\dfrac{1+q}{1-q}\right|+\dfrac{2q}{1-q}\right)$.

Comme $p=1-q$, on a finalement : $P(A)=\dfrac{1-q}{4q}\left(\ln\left|\dfrac{1+q}{1-q}\right|+\dfrac{2q}{1-q}\right)$.

En développant, on fait apparaître le terme $\dfrac{1}{2}$, ce qui est bon pour la suite :

$$\boxed{P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1-q}{4q}\times\ln\left|\frac{1+q}{1-q}\right|}$$

c) Comme $0<q<1$, on a $1+q>1-q>0$ d'où $\left|\dfrac{1+q}{1-q}\right|=\dfrac{1+q}{1-q}>1$, puis, par stricte croissance du logarithme népérien, on obtient : $\ln\left|\dfrac{1+q}{1-q}\right|>0$.

Comme de plus, on a $\dfrac{1-q}{4q}>0$ (car $0<q<1$), il en résulte que $\dfrac{1-q}{4q}\times\ln\left|\dfrac{1+q}{1-q}\right|>0$ et ainsi :

$$\boxed{P(A)>\frac{1}{2}}$$

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option économique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2015

Présentation de l'épreuve

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
• Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (deuxième exercice et problème).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.
• Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet plutôt moins long que d'habitude, mélangeant questions faciles et questions plus difficiles, et bien adapté au public concerné. La présence de questions techniquement difficiles ou abstraites a permis de bien apprécier, d'une part les capacités à mener un calcul compliqué à son terme et d'autre part les capacités à raisonner des candidats : ceux d'entre eux qui étaient bien préparés se sont très bien démarqués alors que ceux qui l'étaient moins ont montré leurs faiblesses théoriques ainsi que leur mauvaise maîtrise des techniques de base, notamment dans les calculs, parfois même dans les calculs élémentaires.

Description du sujet

L'exercice 1 proposait l'étude de la matrice $C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$ ainsi que le calcul de C^n grâce à la division euclidienne du polynôme X^n par un polynôme annulateur de C. La dernière question demandait de compléter des commandes `Scilab` permettant la construction de la matrice C.

• Cet exercice a montré que les notions de noyau et d'image restent floues pour un nombre significatif de candidats, mais il y a des progrès par rapport aux années précédentes. La différence entre famille génératrice et base est, elle aussi, peu claire chez nombre de candidats.
• La majorité des candidats établissent qu'une famille de deux vecteurs est libre et concluent que cette famille est une base de $\mathrm{Im}f$, puisque $\mathrm{Im}f$ est de dimension 2 : en revanche, ils oublient de vérifier que ces deux vecteurs appartiennent à $\mathrm{Im}f$!
• Beaucoup de candidats peinent (ou échouent) à résoudre un système de trois équations dans lequel interviennent des fractions, ainsi que les nombres $(-1)^n$ et 3^n.

L'exercice 2, portant sur la partie "variables à densité" du programme de probabilité, présentait l'étude d'une file d'attente de trois clients pour deux guichets, les temps de passages étant des variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. La dernière question demandait, d'une part, de compléter des commandes `Scilab` simulant la situation, et d'autre part, de trouver une commande permettant de calculer une valeur approchée de la probabilité que le client ayant accédé en dernier à un guichet ait terminé le dernier.

• Cet exercice a révélé que certains candidats ne maîtrisent pas le cours : par exemple, concernant les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
En revanche, une majorité sait trouver la loi de $\min(X,Y)$ lorsque X et Y sont indépendantes.

L'exercice 3 portant sur la partie analyse, avait pour objectif d'étudier la fonction f, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$$

Il s'agissait d'établir que cette fonction possède un minimum global atteint une seule fois.

• Une bonne majorité de candidats sait étudier les extrema d'une fonction simple de deux variables et c'est très encourageant.
• En revanche, cet exercice a révélé les failles de certains candidats, notamment en ce qui concerne les mécanismes usuels de calcul, comme par exemple calculer $f(-4,2)$ lorsque la fonction f est définie par :

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$$

Le problème, portant sur le programme d'analyse et de probabilité, démontrait deux résultats importants pour la suite dans la première partie, à savoir :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt \quad \text{et} \quad \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$$

La deuxième partie étudiait un jeu pour lequel un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce, note le rang n du premier *Pile*, puis place des boules numérotées de 1 à n dans une urne dont il extrait une boule au hasard : le joueur gagne si le numéro porté par la boule tirée est impair.
Une des questions proposait une simulation informatique de la situation.

• Trop de candidats n'ont pas pu s'exprimer à leur gré sur ce problème, peut-être à cause d'une mauvaise gestion du temps, notamment en cherchant par le calcul les sous-espaces propres demandés à l'exercice 1.
• Le problème a permis de distinguer les candidats qui réfléchissent : il a permis aux meilleurs de faire la différence, notamment car certaines questions étaient ouvertes (probabilités conditionnelles à déterminer) et qu'il fallait réfléchir un peu pour trouver le résultat. Dans l'ensemble, il a été plutôt bien réussi par les rares candidats qui ont eu le temps (ou la présence d'esprit) de s'y intéresser...

• On a souvent lu que, si N suit la loi géométrique de paramètre p, alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(N = k) = (1-p)^{k-1} p^k$$

Ceci prouve, une fois encore que parfois, les notions élémentaires ne sont pas maîtrisées.
• Trop de candidats pensent que l'événement $(X = 2k+1)$ signifie « X prend une valeur impaire ».
• Comme d'habitude, la formule des probabilités totales a été copieusement martyrisée par certains candidats.

Statistiques

• Pour l'ensemble des 3685 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10.344 sur 20 (un peu supérieure à celle de l'année dernière et voisine de celle de 2013) et l'écart type vaut 5,79 (légèrement inférieur à celui de l'année dernière).

• 37,2% des candidats, contre 43% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (parmi eux, 16,3% ont une note inférieure à 4).

• 22,2% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage supérieur à celui de 2014 qui était égal à 19%).

• 20,1% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage inférieur à celui de 2014 qui était égal à 23,6%).

Conclusion

L'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font. Et ce fossé entre les aspirations du programme et la réalisation sur le « terrain » semble s'être élargi cette année.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées malgré la présence d'un nombre assez élevé de candidats qui ne respectent pas la numérotation des questions, écrivent mal (ce sont souvent les mêmes) et rendent la tâche du correcteur pénible : qu'ils sachent qu'ils n'ont rien à gagner à pratiquer de la sorte, bien au contraire.
Citons également, ceux, en assez grand nombre, qui font de nombreuses fautes de calcul (souvent par manque de concentration) qui perturbent gravement le déroulement du raisonnement et empêchent de trouver le bon résultat voire obligent à tricher pour le trouver !
Il semble que l'investissement en informatique ait été un peu moins intense que les années précédentes, ce qui est dommage puisqu'il y avait, comme d'habitude, pas mal de points à glaner sur ces questions, et ceci sans y passer énormément de temps.

Il reste toujours un noyau de candidats qui ne peuvent s'empêcher de faire du remplissage au lieu d'argumenter face aux questions dont le résultat est donné : aucun correcteur n'est dupe, rappelons-le.

Précisons pour les futurs candidats qu'ils ne sont pas obligés de recopier les énoncés des questions avant de les traiter et qu'ils ne sont pas, non plus, obligés de recopier tout un programme d'informatique si la question posée était seulement de compléter quelques instructions manquantes.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.