BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

mardi 3 mai 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

2) a) En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).
   b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3) Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

4) a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.
   c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

5) a) Expliquer pourquoi l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I$$
   b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.
   c) Vérifier que la formule trouvée à la question 5a) reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n,+\infty[$, $f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1) Étude de f_n.

a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n,+\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n,+\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n,+\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2) Étude de la suite (u_n).

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \le u_n - n \le e^{-\sqrt{n}}$.

3) a) Utiliser la question 2b) pour compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n = 0
while -------
n = ------
end
disp(n)
```

b) Le script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant 2,3 comme valeur approchée de $\ln 10$.

4) On pose $v_n = u_n - n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \le 1 + \frac{x}{2}$.

c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\sqrt{u_n}} \ge e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On désigne par p un réel de $]0,1[$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.

On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :

$$P(Z=1) = p \text{ et } P(Z=-1) = 1-p$$

Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) \text{ si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) \text{ si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1) Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.

2) a) Établir, grâce au système complet d'événements $((Z=1),(Z=-1))$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x)$$

b) Vérifier que $X(\Omega) = [-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3,\ -3 \le x \le -1,\ -1 \le x \le 1,\ 1 \le x \le 3 \text{ et } x > 3$$

c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

d) Établir que X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$, puis les déterminer.

3) On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

a) Vérifier que l'on a : $X = U\dfrac{1+Z}{2} + V\dfrac{1-Z}{2}$.

b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $E(X)$.

c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $E(X^2)$.

4) a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la loi de $2T-1$.

b) On rappelle que `grand(1,1,'unf',a,b)` et `grand(1,1,'bin',1,p)` sont des commandes `Scilab` permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a,b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

Écrire des commandes `Scilab` permettant de simuler U, V, Z, puis X.

Problème

Partie 1 : questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

c) Établir par encadrement que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

2) Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \ge m,\ \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

3) Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} P\big((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j)\big)$$

b) En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \in [\![n, +\infty [\![,\ P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}$$

c) En déduire, pour tout x de $]0, 1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

d) On rappelle que la commande `grand(1,n,'geom',p)` permet à `Scilab` de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1 : ')
S = ------
disp(S)
```

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k \ln p}$$

1) a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = u_k$$

2) a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $V(X) = \dfrac{-q(q+\ln p)}{(p\ln p)^2}$.

3) Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question 1) de la partie 1, pour montrer que :

$$P(Y = 0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln p}$$

b) Après avoir montré que, pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $P(Y = n) = -\dfrac{p^n q^n}{n \ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n}$.

En déduire, grâce à la question 3) de la première partie, l'égalité :

$$P(Y = n) = -\frac{q^n}{n(1+q)^n \ln p}$$

c) Vérifier que l'on a $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.

d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln p$ et q.

e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a :

$$V(Y) = -\frac{q\big(q + (1+q)\ln p\big)}{(\ln p)^2}$$

Corrigé 2016

Exercice 1 ....

1) $A^2=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&2\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&2\\1&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-4&4\\8&-4&8\\4&-4&8\end{pmatrix}$.

On en déduit : $A^2-4A=\begin{pmatrix}8&-4&4\\8&-4&8\\4&-4&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&-4&4\\8&0&8\\4&-4&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$.

On voit que : $A^2=4A-4I$.

$$\boxed{\text{Un polynôme annulateur de } A \text{ est donc : } X^2-4X+4}$$

2) a) Comme $X^2-4X+4=(X-2)^2$, la seule racine du polynôme X^2-4X+4 est 2, qui est donc la seule valeur propre *possible* de A.
Il reste à vérifier que 2 est effectivement valeur propre de A. Il suffit donc de vérifier que, $A-2I$ n'est pas inversible.

On a $A-2I=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$ et on voit que cette matrice a deux colonnes égales (et même trois colonnes proportionnelles), ce qui prouve que $A-2I$ n'est pas inversible.
Bilan :

$$\boxed{\text{La seule valeur propre de } A \text{ (donc aussi de } f\text{) est } 2}$$

b) Comme A n'a que la valeur propre 2, si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $2I$ et il existerait une matrice P inversible telle que :

$$A=P(2I)P^{-1}=2PIP^{-1}=2PP^{-1}=2I$$

Comme la matrice A n'est pas égale à la matrice $2I$, on peut conclure :

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

Comme 0 n'est pas valeur propre de A, on sait que :

$$\boxed{A \text{ est inversible}}$$

3) On pose $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et on résout le système $AX=2X$.

On trouve $AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 2x + 2z = 2y \\ x - y + 3z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + z = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + z = y$

Remarque. On aurait pu directement résoudre $(A - 2I)X = 0$ avec la matrice $A - 2I$ explicitée précédemment.

On obtient donc : $X = \begin{pmatrix} x \\ x + z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 est :

$$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2 est $\text{Vect}\big((1,1,0), (0,1,1)\big)$.

En posant $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (0,1,1)$, la famille (u_1, u_2) est génératrice du seul sous-espace propre de f mais comme u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, la famille (u_1, u_2) est libre et c'est ainsi une base du sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2.

4) a) Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Soit trois réels *a*, *b* et *c* tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. Comme $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$, on a $u_3 = (1,1,1)$ et cette relation s'écrit : $a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,1,1) = (0,0,0)$.

On en déduit $(a + c,\ a + b + c,\ b + c) = (0,0,0)$ qui donne : $\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} a = -c \\ -c - c + c = 0 \\ b = -c \end{cases}$ et il reste : $\begin{cases} a = -c \\ -c = 0 \\ b = -c \end{cases}$. On a donc : $a = b = c = 0$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est libre et elle contient trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc :

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

b) On sait déjà que $f(u_1) = 2u_1$ et $f(u_2) = 2u_2$ donc il reste à déterminer $f(u_3)$.

Comme $f\left(u_3\right)=f\left(e_1+e_2+e_3\right)$, on fait le calcul $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ qui donnera les coordonnées de $f\left(u_3\right)$ dans la base $\left(e_1,e_2,e_3\right)$. On a :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&2\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

On peut écrire ce qui précède sous la forme :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

On peut conclure : $f\left(u_3\right)=u_1+u_2+2u_3$

Remarque. On pouvait "tricher" un peu puisque l'énoncé indique que les éléments diagonaux de la matrice T de f dans la base $\left(u_1,u_2,u_3\right)$ sont tous égaux à 2 donc on est certain que $f\left(u_3\right)$ s'écrit $\alpha u_1+\beta u_2+2u_3$. Ensuite, on trouve α et β par identification.

La matrice T de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$T=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

c) En posant $T=2I+N$, on a $N=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Comme la matrice I commute avec toutes les matrices, la matrice $2I$ aussi, et on peut utiliser la formule du binôme de Newton. De plus, on a $N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et on en déduit, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 :

$$\boxed{N^k=N^2N^{k-2}=0N^{k-2}=0}$$

On a donc, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$T^n=\left(2I+N\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(2I\right)^{n-k}N^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}IN^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}N^k.$$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, seuls les deux premiers termes subsistent (les autres sont nuls ou absents d'après l'encadré précédent) et on a :

$$T^n=\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}2^{n-k}N^k=\binom{n}{0}2^nI+\binom{n}{1}2^{n-1}N=2^nI+n2^{n-1}N$$

Comme $N = T - 2I$, on obtient :

$$T^n = 2^n I + n2^{n-1}\left(T - 2I\right) = 2^n I + n2^{n-1}T - n2^n I$$

En arrangeant, on trouve :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = n2^{n-1}T - \left(n-1\right)2^n I}$$

On vérifie que cette égalité reste vraie pour $n = 0$ (elle donne bien $T^0 = I$).

5) a) Comme T est la matrice de f dans la base $\left(u_1, u_2, u_3\right)$, on en déduit (passerelle matrice-endomorphisme) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = n2^{n-1} f - \left(n-1\right)2^n Id}$$

Pour finir, comme A est la matrice de f dans la base $\left(e_1, e_2, e_3\right)$, on en déduit (on prend la même passerelle dans l'autre sens) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n2^{n-1}A - \left(n-1\right)2^n I}$$

b) D'après la question 1), on a : $A^2 = 4A - 4I$ (ce qui est corroboré par la formule de la question 5a) ci-dessus). On peut écrire cette égalité sous la forme :

$$4A - A^2 = 4I$$

En mettant A en facteur, on obtient $A\left(4I - A\right) = 4I$, puis en divisant par 4, on a :

$$A\left(I - \frac{1}{4}A\right) = I$$

Ceci prouve que A est inversible (on le savait déjà) mais surtout que :

$$\boxed{A^{-1} = I - \frac{1}{4}A}$$

c) Si on remplace n par -1 dans l'égalité obtenue à la question 5a), on trouve :

$A^{-1} = \left(-1\right)2^{-1-1}A - \left(-1-1\right)2^{-1}I = -\frac{1}{4}A + 2 \times \frac{1}{2}I = -\frac{1}{4}A + I$, ce qui est correct d'après la question 5b).

En conclusion :

$$\boxed{\text{La formule trouvée à la question 5a) reste valable pour } n = -1}$$

Exercice 2

1) a) La fonction $h : t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[n, +\infty[$. Comme f_n est une primitive de h sur $[n, +\infty[$, f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[n, +\infty[$, on a : $f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$.

On conclut que :

$$\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } [n,+\infty[}$$

b) Pour tout $t \geq n$, on a : $e^{\sqrt{t}} \geq e^{\sqrt{n}}$ (car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$). Ainsi, en intégrant bornes dans l'ordre croissant (avec $x \geq n$), on trouve :

$$\forall x \geq n,\ f_n(x) \geq (x-n)\ e^{\sqrt{n}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-n)\ e^{\sqrt{n}} = +\infty$, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$$

c) La fonction f_n est continue sur $[n, +\infty[$ (elle est même de classe C^1) et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $[n, +\infty[$sur $[f_n(n), +\infty[$, c'est-à-dire de $[n, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Par suite, comme 1 appartient à $[0, +\infty[$, l'équation " $f_n(x) = 1$" a une seule solution, notée u_n, élément de $[n,+\infty[$.

2) a) $u_n \in [n,+\infty[$ donc $u_n \geq n$.
On a donc, par minoration :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

b) Pour tout t de $[n, u_n]$, on a : $e^{\sqrt{n}} \leq e^{\sqrt{t}} \leq e^{\sqrt{u_n}}$ (la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$).
En intégrant ces fonctions continues sur $[n, u_n]$, les bornes étant dans l'ordre croissant, on obtient : $(u_n - n)\ e^{\sqrt{n}} \leq f_n(u_n) \leq (u_n - n)\ e^{\sqrt{u_n}}$, mais, en remarquant que $f_n(u_n) = 1$, on a en fait :

$$(u_n - n)\ e^{\sqrt{n}} \leq 1 \leq (u_n - n)\ e^{\sqrt{u_n}}$$

En multipliant l'inégalité de gauche par $e^{-\sqrt{n}} > 0$, on obtient : $u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
En multipliant l'inégalité de droite par $e^{-\sqrt{u_n}} > 0$, on obtient : $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n$.
En regroupant ces deux derniers résultats, on a enfin :

$$\boxed{e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}}$$

3) a) Grâce à la question précédente, il suffit de déterminer la valeur de n pour laquelle on a $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$.

Les commandes `Scilab` complétées sont donc :

```
n = 0
while exp(-sqrt(n))>0.0001
n = n+1
end
disp(n)
```

b) En résolvant l'inéquation $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$, on obtient :

$e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow -\sqrt{n} \leq \ln\left(10^{-4}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{n} \leq -4\ln 10 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 4\ln 10$.

$e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow n \geq 16\left(\ln 10\right)^2$.

Comme $\ln 10 \approx 2,3$, on a $\left(\ln 10\right)^2 \approx 5,29$, puis $16\left(\ln 10\right)^2 \approx 16\times 5,29 > 16\times 5 = 80$.

La valeur cherchée est donc :

$$\boxed{n = 85}$$

4) a) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{u_n}} = 0$. D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$, donc, grâce au théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement obtenu à la question 2b), on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - n) = 0$, ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$$

b) Pour tout réel x, on a : $\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \dfrac{x^2}{4}$. Comme $\dfrac{x^2}{4} \geq 0$, on en déduit : $1 + x \leq \left(1+\frac{x}{2}\right)^2$. Comme on prend $x \geq -1$, on a $x+1 \geq 0$ et par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\forall x \geq -1,\ \sqrt{1+x} \leq \left|1+\tfrac{x}{2}\right|$$

Pour finir, $1+\frac{x}{2}$ étant positif, on a :

$$\boxed{\forall x \geq -1,\ \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}}$$

c) Comme $u_n = n + v_n$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} = e^{-\sqrt{n+v_n}} = e^{-\sqrt{n\left(1+\frac{v_n}{n}\right)}} = \exp\left(-\sqrt{n}\sqrt{1+\tfrac{v_n}{n}}\right)$$

On peut appliquer l'inégalité obtenue au début de cette question avec $x = \dfrac{v_n}{n}$ qui est positif (donc supérieur ou égal à –1), et on trouve : $\sqrt{1+\dfrac{v_n}{n}} \leq 1 + \dfrac{v_n}{2n}$.

En multipliant par $-\sqrt{n}$ qui est négatif, on obtient : $-\sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{v_n}{n}} \geq -\sqrt{n}\left(1+\dfrac{v_n}{2n}\right)$.

Par croissance de la fonction exponentielle, on a enfin :

$$\exp\left(-\sqrt{n}\sqrt{1+\tfrac{v_n}{n}}\right) \geq \exp\left(-\sqrt{n}\left(1+\tfrac{v_n}{2n}\right)\right)$$

En développant dans l'exponentielle de droite et en se souvenant que $e^{-\sqrt{u_n}} = \exp\left(-\sqrt{n}\sqrt{1+\tfrac{v_n}{n}}\right)$, on trouve : $e^{-\sqrt{u_n}} \geq \exp\left(-\sqrt{n}-\tfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\tfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)}$$

d) Grâce à cette minoration de $e^{-\sqrt{u_n}}$, l'encadrement de la question 2b) peut se prolonger et on obtient : $e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\tfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.

Après division par $e^{-\sqrt{n}} > 0$, on a : $\exp\left(\tfrac{-v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq \dfrac{u_n - n}{\sqrt{n}} \leq 1$.

Sans aucune indétermination, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-v_n}{2\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\tfrac{-v_n}{2\sqrt{n}}\right) = 1$, et grâce au théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$$

Ceci démontre que :

$$\boxed{u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}}$$

Exercice 3 ....

1) a) D'après le cours, on a :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -3 \\ \dfrac{x+3}{4} \text{ si } -3 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases} \text{ et } F_V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{4} \text{ si } -1 \leq x \leq 3 \\ 1 \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

b) Avec la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\left((Z=1),(Z=-1)\right)$, on obtient successivement, pour tout réel x :

$P(X \leq x) = P([X \leq x] \cap [Z=1]) + P([X \leq x] \cap [Z=-1])$

$P(X \leq x) = P([U \leq x] \cap [Z=1]) + P([V \leq x] \cap [Z=-1])$

Comme Z est indépendante de U et V, on peut écrire :

$$P(X \leq x) = P(U \leq x)P(Z=1) + P(V \leq x)P(Z=-1)$$

Par définition, on a $P(U \leq x) = F_U(x)$ et $P(V \leq x) = F_V(x)$, de plus, on sait que $P(Z=1) = p$, $P(Z=-1) = 1-p$, donc finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = p\,F_U(x) + (1-p)\,F_V(x)}$$

b) En passant en revue les 5 cas indiqués par l'énoncé, afin de remplacer les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$, on trouve :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -3 \\ \dfrac{p(x+3)}{4} \text{ si } -3 \leq x \leq -1 \\ \dfrac{x+2p+1}{4} \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{(1-p)x+3p+1}{4} \text{ si } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

c) La fonction F_X est de classe C^1 sur les intervalles $]-\infty,-3[$, $]-3,-1[$, $]-1,1[$, $]1,3[$ et $]3,+\infty[$ soit comme fonction constante, soit comme fonction polynomiale. En dérivant sur ces intervalles, on obtient :

$$F_X'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -3 \\ \dfrac{p}{4} \text{ si } -3 < x < -1 \\ \dfrac{1}{4} \text{ si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{1-p}{4} \text{ si } 1 < x < 3 \\ 0 \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

On obtient une densité f_X de la variable aléatoire X en posant, par exemple :

$$f_X(-3) = \frac{p}{4},\ f_X(-1) = \frac{1}{4},\ f_X(1) = \frac{1-p}{4} \text{ et } f_X(3) = 0$$

Conclusion :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{4} \text{ si } -3 \leq x < -1 \\ \dfrac{1}{4} \text{ si } -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{1-p}{4} \text{ si } 1 \leq x < 3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

d) La restriction de la fonction $t \mapsto t\,f_X(t)$ à l'intervalle $[-3,-1[$ a une limite finie en –1 (elle vaut $-\dfrac{p}{4}$) donc l'intégrale $\int_{-3}^{-1} t\,f_X(t)\,dt$ existe.

Pour la même raison, les intégrales $\int_{-1}^{1} t\, f_X(t)dt$, $\int_{1}^{3} t\, f_X(t)dt$ existent aussi.

Comme les intégrales $\int_{-\infty}^{-3} t\, f_X(t)dt$ et $\int_{3}^{+\infty} t\, f_X(t)dt$ sont nulles (car *f* est nulle sur ces deux intervalles), on est certain que *X* admet une espérance et on a :

$E(X)=\int_{-3}^{-1} t\, f_X(t)dt+\int_{-1}^{1} t\, f_X(t)dt+\int_{1}^{3} t\, f_X(t)dt$.

$E(X)=\int_{-3}^{-1} t\frac{p}{4}dt+\int_{-1}^{1} t\frac{1}{4}dt+\int_{1}^{3} t\frac{1-p}{4}dt$.

$E(X)=\frac{p}{4}\int_{-3}^{-1} t\,dt+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} t\,dt+\frac{1-p}{4}\int_{1}^{3} t\,dt$ (par linéarité de l'intégration).

$E(X)=\frac{p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-3}^{-1}+\frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1}+\frac{1-p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1}^{3}$.

$E(X)=\frac{p}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1-p}{4}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)$.

$E(X)=-p+1-p$.

On trouve enfin :

$$\boxed{E(X)=1-2p}$$

De la même façon, *X* admet un moment d'ordre 2 et on a :

$E(X^2)=\int_{-3}^{-1} t^2 f_X(t)dt+\int_{-1}^{1} t^2 f_X(t)dt+\int_{1}^{3} t^2 f_X(t)dt$

$E(X^2)=\int_{-3}^{-1} t^2\frac{p}{4}dt+\int_{-1}^{1} t^2\frac{1}{4}dt+\int_{1}^{3} t^2\frac{1-p}{4}dt$

$E(X^2)=\frac{p}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-3}^{-1}+\frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\frac{1-p}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{1}^{3}$.

$E(X^2)=\frac{p}{4}\left(-\frac{1}{3}-\frac{-27}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{-1}{3}\right)+\frac{1-p}{4}\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right)$.

$E(X^2)=\frac{p}{4}\times\frac{26}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1-p}{4}\times\frac{26}{3}$.

$E(X^2)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{26}{3}=\frac{7}{3}$.

On trouve alors la variance de *X* avec la formule de Koënig-Huygens :

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2 .$$

Conclusion :

$$\boxed{V(X)=\frac{7}{3}-(1-2p)^2=4\left(\frac{1}{3}+p-p^2\right)}$$

3) a) • Lorsque *Z* prend la valeur 1, on a $U\frac{1+Z}{2}+V\frac{1-Z}{2}=U$.

• Lorsque *Z* prend la valeur –1, on a $U\frac{1+Z}{2}+V\frac{1-Z}{2}=V$.

On retrouve bien la définition de X donnée par l'énoncé.

Conclusion :

$$\boxed{X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}}.$$

b) Comme U et Z ont une espérance, alors par indépendance de U et Z , les variables U et $\frac{1+Z}{2}$ sont indépendantes et comme elles possèdent une espérance, la variable $U\frac{1+Z}{2}$ possède aussi une espérance. De même, la variable $V\frac{1-Z}{2}$ possède aussi une espérance.
Tout ceci montre que X possède une espérance et, par linéarité de l'espérance, on a : $E(X) = E\left(U\frac{1+Z}{2}\right) + E\left(V\frac{1-Z}{2}\right)$.
Toujours par indépendance, on obtient :

$$E(X) = E(U)\ E\left(\frac{1+Z}{2}\right) + E(V)\ E\left(\frac{1-Z}{2}\right)$$

Et encore avec la linéarité de l'espérance, on a :

$$E(X) = E(U)\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}E(Z)\right) + E(V)\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}E(Z)\right)$$

Or $E(Z) = p1 + (1-p)\times(-1) = 2p-1$, $E(U) = -1$ et $E(V) = 1$ donc :

$$E(X) = -\frac{1}{2} - \frac{2p-1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2p-1}{2}$$

On retrouve bien :

$$\boxed{E(X) = 1-2p}$$

c) Avec l'égalité $X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}$, on trouve :

$$X^2 = U^2\frac{(1+Z)^2}{4} + 2UV\frac{(1+Z)(1-Z)}{4} + V^2\frac{(1-Z)^2}{4}$$

Avec les trois célèbres identités remarquables, on a :

$$X^2 = U^2\frac{1+2Z+Z^2}{4} + 2UV\frac{1-Z^2}{4} + V^2\frac{1-2Z+Z^2}{4}$$

Comme $Z^2 = 1$, il reste :

$$X^2 = U^2\frac{1+Z}{2} + V^2\frac{1-Z}{2}$$

On montre que $E(X^2)$ existe avec les mêmes arguments que ceux utilisés pour $E(X)$ et, toujours par indépendance, on obtient :

$$E(X^2) = \frac{1}{2}E(U^2)E(1+Z) + \frac{1}{2}E(V^2)E(1-Z)$$

Or on a :

$E(U^2) = V(U) + (E(U))^2 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$.

$E(V^2) = V(V) + (E(V))^2 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$.

$E(1+Z) = 1 + E(Z) = 1 + (2p-1) = 2p$.

$E(1-Z) = 1 - E(Z) = 1 - (2p-1) = 2(1-p)$.

Finalement : $E(X^2) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} \times 2p + \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} \times 2(1-p) = \frac{7}{3}p + \frac{7}{3}(1-p) = \frac{7}{3}$.

Cette valeur est bien celle qui a été trouvée à la question 2d).

4) a) • Comme $T(\Omega) = \{0,1\}$, on a $(2T-1)(\Omega) = \{-1,1\}$.

- $P(2T-1=-1) = P(2T=0) = P(T=0) = 1-p$.
- $P(2T-1=1) = P(2T=2) = P(T=1) = p$

On conclut :

$$\boxed{2T-1 \text{ a même loi que } Z}$$

b) Comme U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, alors on simule U avec la commande `U = grand(1,1,'unf',-3,1)` et comme V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$, alors on simule V avec la commande `V = grand(1,1,'unf',-1,3)`.

Pour finir, on utilise la relation $X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}$. En récapitulant toutes les commandes, on obtient :

```
U = grand(1,1,'unf',-3,1)
V = grand(1,1,'unf',-1,3)
Z = 2*grand(1,1,'bin',1,p)-1
X = U*(1+Z)/2 + V*(1-Z)/2
```

Problème ....

Partie 1 préliminaires.

1) a) Comme x appartient à $[0,1[$, alors, pour tout t de $[0,x]$, on a $t \neq 1$, d'où :

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{q=0}^{n-1} t^q = \frac{1-t^n}{1-t}}$$

b) En intégrant entre 0 et x (les fonctions sont continues sur $[0,x]$), on obtient, par linéarité de l'intégration : $\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$, puis, toujours par linéarité de l'intégration : $\sum_{p=1}^{n}\int_0^x t^{p-1}dt = -\ln|1-x| - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$, ce qui s'écrit (comme $x<1$) :

$$\boxed{\forall x\in[0,1[,\ \sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt}$$

c) Pour tout t de $[0, x]$, on a successivement : $0\le t\le x$, $-x\le -t\le 0$, $1-x\le 1-t\le 1$. Comme $1-x>0$ et comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0,1]$, on obtient : $\frac{1}{1-x} \ge \frac{1}{1-t} \ge 1$. En multipliant les trois membres par $t^n \ge 0$ et en intégrant ces fonctions continues entre 0 et x (bornes dans l'ordre croissant), on trouve : $\frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt \ge \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \ge \int_0^x t^n dt$, ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} \ge \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \ge \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ et, comme $x\in[0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$.
Le théorème d'encadrement permet alors de conclure que :

$$\boxed{\forall x\in[0,1[,\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0}$$

d) D'après l'égalité obtenue à la question 1b), on est sûr que $\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p}$ a une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui signifie que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente, avec, de plus, après passage à la limite :

$$\boxed{\forall x\in[0,1[,\ \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)}$$

2) Procédons par récurrence.

Pour tout entier naturel $q\ge m$, on note $R(q)$: " $\sum_{k=m}^{q}\binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$ ".

• $R(m)$ est vraie. En effet, $\sum_{k=m}^{m}\binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$.

• Supposons $R(q)$ vraie pour un entier naturel q fixé, supérieur ou égal à m.

On a alors : $\sum_{k=m}^{q+1}\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{q}\binom{k}{m} + \binom{q+1}{m}$.

D'où : $\sum_{k=m}^{q+1}\binom{k}{m}=\binom{q+1}{m+1}+\binom{q+1}{m}=\binom{q+2}{m+1}$ (grâce à la formule du triangle de Pascal).
Ainsi $R(q+1)$ est vraie.
• Par récurrence, pour tout couple (m,q) d'entiers naturels tels que $m\leq q$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=m}^{q}\binom{k}{m}=\binom{q+1}{m+1}}$$

3) a) Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a $X_i(\Omega)=\mathbb{N}^*$, et par mutuelle indépendance des variables $X_1, X_2, ..., X_n$, on en déduit :

$$\boxed{S_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![}$$

Pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :
$P(S_{n+1}=k)=P(S_n+X_{n+1}=k)=\sum_{\substack{j\in S_n(\Omega)\\ k-j\in X_{n+1}(\Omega)}}P\big((S_n=j)\cap(X_{n+1}=k-j)\big)$.

On a : $\begin{cases} j\in S_n(\Omega)\\ k-j\in X_{n+1}(\Omega)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} j\geq n\\ k-j\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} j\geq n\\ j\leq k-1\end{cases}$.

On obtient : $P(S_{n+1}=k)=\sum_{j=n}^{k-1}P\big((S_n=j)\cap(X_{n+1}=k-j)\big)$.

Comme X_{n+1} est indépendante de $X_1,X_2,...,X_n$, alors X_{n+1} et S_n sont indépendantes, et on obtient :

$$\boxed{P(S_{n+1}=k)=\sum_{j=n}^{k-1}P(S_n=j)P(X_{n+1}=k-j)}$$

b) Posons, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $R(n)$: " $\forall k\geq n, P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}$ ".
• On a $S_1=X_1$ et, pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$P(X_1=k)=x(1-x)^{k-1}=\binom{k-1}{0}x^1(1-x)^{k-1}$$

La propriété $R(1)$ est donc vraie.
• Soit n un entier naturel non nul tel que $R(n)$ est vraie.
Pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a, d'après ce qui précède :

$$P(S_{n+1}=k)=\sum_{j=n}^{k-1}P(S_n=j)P(X_{n+1}=k-j)=\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}x^n(1-x)^{j-n}(1-x)^{k-j-1}x.$$

$$P(S_{n+1}=k)=\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}x^{n+1}(1-x)^{k-n-1}=x^{n+1}(1-x)^{k-n-1}\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}.$$

Grâce à la formule montrée à la question 2), on a : $\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}=\sum_{j=n-1}^{k-2}\binom{j}{n-1}=\binom{k-1}{n}$.

On en conclut : $P(S_{n+1}=k)=\binom{k-1}{n}x^{n+1}(1-x)^{k-(n+1)}$. La propriété $R(n+1)$ est donc vraie.

• Finalement, par récurrence, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\boxed{\forall k \geq n, P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}}$$

c) Comme le support de la variable S_n est $[\![n,+\infty[\![$, on en déduit, d'après la définition d'une variable aléatoire : $\sum_{k=n}^{+\infty}P(S_n=k)=1$.

On a donc $\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}=1$ et on en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n}=\frac{1}{x^n}}$$

d) Pour trouver S_n, on doit faire la somme de n variables indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p donc les commandes complétées sont :

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1 : ')
S = sum(grand(1,n,'geom',p))
disp(S)
```

Partie 2

1) a) Comme p appartient à $]0,1[$, q est également dans $]0,1[$ donc positif et comme $\ln p$ est strictement négatif, u_k est bien défini et positif.

b) La série de terme général u_k est convergente d'après la partie 1 et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=-\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k}=-\frac{1}{\ln p}\times(-\ln(1-q))$$

Comme $1-q=p$, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=1}$$

2) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $kP(X=k)=-\frac{q^k}{\ln p}$. Comme la série de terme général q^k est absolument convergente (car $|q|<1$), X a une espérance et :

$E(X)=-\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty}q^k=-\frac{1}{\ln p}\times\frac{q}{1-q}$. En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{E(X)=\frac{-q}{p\ln p}}$$

b) De même, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $k^2 P(X=k) = -\dfrac{kq^k}{\ln p} = -\dfrac{q}{\ln p} \times kq^{k-1}$.

Comme la série de terme général kq^{k-1} est absolument convergente (série géométrique "dérivée" avec $|q|<1$), X a un moment d'ordre 2 et :

$$E(X^2) = -\frac{q}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = -\frac{q}{\ln p} \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{-q}{p^2 \ln p}$$

Grâce au théorème de Koenig-Huygens, on obtient :

$$V(X) = \frac{-q}{p^2 \ln p} - \left(\frac{-q}{p \ln p}\right)^2 = \frac{-q}{p^2 \ln p} + \frac{q^2}{p^2 (\ln p)^2} = \frac{-q \ln p + q^2}{p^2 (\ln p)^2}$$

En définitive :

$$\boxed{V(X) = \frac{-q(q + \ln p)}{(p \ln p)^2}}$$

3) a) • Si X prend la valeur k, alors Y prend toutes les valeurs entières entre 0 et k, et comme k parcourt $\mathbb{N}^*$, on conclut :

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

• La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements de probabilités non nulles $(X=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ s'écrit :

$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) P_{(X=k)}(Y=0) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k \ln p} \times q^k = -\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(q^2)^k}{k}.$$

D'après la question 1) de la première partie ($q^2 \in [0,1[$), on obtient :

$$P(Y=0) = -\frac{1}{\ln p} \times \left(-\ln(1-q^2)\right) = \frac{\ln(1-q^2)}{\ln p}$$

Comme $\ln(1-q^2) = \ln(1-q) + \ln(1+q) = \ln p + \ln(1+q)$, on trouve finalement :

$$P(Y=0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln p}$$

b) On a : $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{1}{k} \times \dfrac{k!}{n!(k-n)!}$ et, comme $k \geq 1$, on peut simplifier par k, ce qui donne : $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{(k-1)!}{n!(k-n)!}$. Ensuite, comme $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{1}{n} \times \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} = \frac{1}{n} \times \binom{k-1}{n-1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{\binom{k}{n}}{k}=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a successivement, toujours grâce à la formule des probabilités totales :

$$P(Y=n)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)P_{(X=k)}(Y=n)=-\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{q^k}{k\ln p}\times\binom{k}{n}p^nq^{k-n}$$

$$P(Y=n)=-\frac{1}{\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}\frac{p^nq^{2k-n}}{k}=-\frac{p^nq^n}{\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}\frac{(q^2)^{k-n}}{k}.$$

Comme $\frac{\binom{k}{n}}{k}=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, on obtient :

$$\boxed{P(Y=n)=-\frac{p^nq^n}{n\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n}}$$

D'après la question 3) de la première partie, avec $x=1-q^2$ qui est bien dans $]0,1[$, on trouve :

$$P(Y=n)=-\frac{p^nq^n}{n\ln p}\times\frac{1}{(1-q^2)^n}$$

Avec $1-q^2=(1-q)(1+q)=p(1+q)$, on a enfin :

$$\boxed{P(Y=n)=-\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln p}}$$

c) Grâce aux questions 2a) et 2b), on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}P(Y=n)=1+\frac{\ln(1+q)}{\ln p}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln p}=1+\frac{\ln(1+q)}{\ln p}-\frac{1}{\ln p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^n}{n}$$

Comme $\frac{q}{1+q}$ appartient à $[0,1[$, la question 1) du préliminaire s'applique et on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}P(Y=n)=1+\frac{\ln(1+q)}{\ln p}-\frac{1}{\ln p}\times\left(-\ln\left(1-\frac{q}{1+q}\right)\right)=1+\frac{\ln(1+q)}{\ln p}-\frac{\ln(1+q)}{\ln p}.$$

Bilan :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}P(Y=n)=1}$$

d) Pour tout entier naturel n non nul, on a : $nP(Y=n) = -\dfrac{1}{\ln p}\left(\dfrac{q}{1+q}\right)^n$.

La série de terme général $\left(\dfrac{q}{1+q}\right)^n$ est une série géométrique absolument convergente donc Y a une espérance et :

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y=n) = -\frac{1}{\ln p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{q}{1+q}\right)^n = -\frac{1}{\ln p}\times\frac{q}{1+q}\times\frac{1}{1-\dfrac{q}{1+q}}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{E(Y) = -\frac{q}{\ln p}}$$

e) De même, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$n^2 P(Y=n) = -\frac{1}{\ln p}\times n\left(\frac{q}{1+q}\right)^n = -\frac{1}{\ln p}\times\frac{q}{1+q}\times n\left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}$$

La série de terme général $n\left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$ est une série géométrique (dérivée) absolument convergente donc Y a un moment d'ordre 2 et :

$$E(Y^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 P(Y=n) = -\frac{1}{\ln p}\times\frac{q}{1+q}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}.$$

$$E(Y^2) = -\frac{1}{\ln p}\times\frac{q}{1+q}\times\frac{1}{\left(1-\dfrac{q}{1+q}\right)^2}.$$

En simplifiant, on trouve :

$$E(Y^2) = -\frac{1}{\ln p}\times\frac{q}{1+q}\times(1+q)^2 = \frac{-q(1+q)}{\ln p}$$

Grâce au théorème de Koenig-Huygens, on obtient :

$$V(Y) = \frac{-q(1+q)}{\ln p} - \left(\frac{q}{\ln p}\right)^2 = \frac{-q(1+q)\ln p - q^2}{(\ln p)^2}.$$

Après mise en facteur de $-q$, on a :

$$\boxed{V(Y) = \frac{-q\big(q+(1+q)\ln p\big)}{(\ln p)^2}}$$

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option économique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2016

Présentation de l'épreuve

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.

• Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (deuxième exercice et problème).

La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

• Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet un peu long, parcourant l'ensemble du programme d'ECE, équilibré, mélangeant questions faciles et questions plus difficiles, et bien adapté au public concerné. La présence de questions techniquement difficiles ou abstraites a permis de bien apprécier, d'une part les capacités à mener un calcul compliqué à son terme et d'autre part les capacités à raisonner des candidats : ceux d'entre eux qui étaient bien préparés se sont très bien démarqués alors que ceux qui l'étaient moins ont montré leurs faiblesses théoriques ainsi que leur mauvaise maîtrise des techniques de base, notamment dans les calculs, parfois même dans les calculs élémentaires.

Description du sujet

L'exercice 1 proposait le calcul de la puissance n-ième de la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

• Cet exercice a montré que la notion de liberté reste floue pour un nombre significatif de candidats.
La différence entre famille génératrice et base est, elle aussi, peu claire chez nombre de candidats.

• La formule du binôme, pourtant classique, semble rebuter la majorité des candidats : oubli du coefficient binomial ou encore la faute de calcul suivante, $(2I)^{n-k}=2I^{n-k}=2I$, qui a lourdement pénalisé les candidats peu concentrés qui l'avaient faite.

L'exercice 2, portant sur la partie analyse du programme, présentait l'étude de la famille des fonctions f_n définies par : $\forall x\in[n,+\infty[,\ f_n(x)=\int_n^{+\infty}\exp\left(\sqrt{t}\right)dt$. Ensuite, on étudiait la suite (u_n) définie par $f_n(u_n)=1$

La troisième question demandait, d'une part, de compléter des commandes `Scilab` permettant le calcul du plus petit entier naturel n pour lequel $u_n - n \leq 10^{-4}$, et d'autre part de choisir parmi trois affichages, lequel était le bon.

• Cet exercice a révélé que de nombreux candidats ne maîtrisent pas la dérivation de fonctions élémentaires et encore moins la dérivation de la fonction f_n. La présence de beaucoup de "lettres" (n, t et x) noie de nombreux candidats.

L'exercice 3 portant sur la partie probabilités du programme, avait pour objectif d'étudier la variable aléatoire X, définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) \text{ si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) \text{ si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$, où U et V sont deux variables aléatoires indépendantes telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$ et où Z est une variable aléatoire indépendante de U et V, dont la loi est donnée par : $P(Z=1) = p$ et $P(Z=-1) = 1-p$.

• Cet exercice est le moins bien réussi et prouve que la notion de fonction de répartition n'est absolument pas maîtrisée par un grand nombre de candidats.

Le problème, portant sur le programme d'analyse et de probabilité, démontrait deux résultats importants pour la suite dans la première partie, à savoir :

$$\forall x \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \text{ et } \forall x \in]0,1[,\ \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

La deuxième partie étudiait une variable aléatoire X dont la loi était donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = -\frac{(1-p)^k}{k \ln p}$$

Pour finir, on cherchait la loi d'une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'événement $(X=k)$, était la loi binomiale de paramètres k et p.

• Trop de candidats n'ont pas pu s'exprimer à leur gré sur ce problème, peut-être à cause d'une mauvaise gestion du temps.
• Le problème a révélé des failles abyssales chez certains candidats, notamment concernant le calcul de la somme des premiers termes d'une suite géométrique.
• Comme d'habitude, la formule des probabilités totales a été copieusement martyrisée par de nombreux candidats.

Statistiques

• Pour l'ensemble des 3872 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10.405 sur 20 (sensiblement la même que l'année dernière) et l'écart type vaut 6,5 (bien supérieur à celui de l'année dernière).

• 40,3% des candidats, contre 37,2% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (dont plus de la moitié, 21,4%, ont une note inférieure à 4).

• 18,2% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage inférieur à celui de 2015 qui était égal à 22,2%).

• 25,8 des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage supérieur à celui de 2015 qui était égal à 20,1%).

Conclusion

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font. Le fossé entre les aspirations du programme et la réalisation sur le « terrain » semble s'être élargi, une fois encore, cette année, mais heureusement pas pour les bons et très bons candidats. Le niveau semble meilleur en algèbre linéaire que dans les autres domaines.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées malgré la présence d'un nombre assez élevé de candidats qui ne respectent pas la numérotation des questions, écrivent mal (ce sont souvent les mêmes) et rendent la tâche du correcteur pénible : qu'ils sachent qu'ils n'ont rien à gagner à pratiquer de la sorte, bien au contraire.

Citons également, ceux, en assez grand nombre, qui font de nombreuses fautes de calcul (souvent par manque de concentration) qui perturbent gravement le déroulement du raisonnement et empêchent de trouver le bon résultat voire obligent à tricher pour le trouver !

Il semble que l'investissement en informatique ait été un peu plus intense que les années précédentes, ce qui est très bon signe (le langage Scilab semblant plaire aux candidats) puisqu'il y avait, comme d'habitude, pas mal de points à glaner sur ces questions, et ceci sans y passer énormément de temps.

Il reste toujours un noyau de candidats qui ne peuvent s'empêcher de faire du remplissage au lieu d'argumenter face aux questions dont le résultat est donné : aucun correcteur n'est dupe, rappelons-le.

Précisons pour les futurs candidats qu'ils ne sont pas obligés de recopier les énoncés des questions avant de les traiter et qu'ils ne sont pas, non plus, obligés de recopier tout un programme d'informatique si la question posée était seulement de compléter quelques instructions manquantes.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.