BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION ECONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

7 mai 2019, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1) a) Déterminer $(A-I)^2$.
   b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

2) On pose $A=N+I$.
   a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
   b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n=-1$.

3) a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.
   b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4) On pose $u_1 = (f - Id)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

   a) Montrer que le rang de $f - Id$ est égal à 1.

   b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.

5) a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

6) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

7) On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $[\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui vaut 1.

   a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

   b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \Leftrightarrow (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

   c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le i-ième tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1) Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

2) a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

   b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

   c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3) On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

   a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$P([X = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

   b) En déduire $P(Y = 0)$.

   c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

4) Simulation informatique.

On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.

a) Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire *X*.

On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
nB=n-1
X=1
u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
   nB=----
   u=grand(1,1,'uin',1,----)
   X=----
end
disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage numéro')
```

b) Compléter les lignes (4) et (8) ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par *X*, la valeur prise par *Y*.

```
(1)  n=input('entrez une valeur pour n :')
(2)  nB=n-1
(3)  X=1
(4)  Y=----
(5)  u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
(6)  while u<nB+1
(7)        nB=----
(8)        if u==1 then Y=----
(9)        end
(10)       u=grand(1,1,'uin',1,----)
(11)       X=----
(12) end
(13) disp(X,'la boule noire est apparue au tirage numéro')
(14) disp(Y,'la valeur de Y est')
```

Exercice 3

Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$. On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1) Déterminer u_1 et u_2.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).

a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \, dt$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$ puis celle de $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.

c) Montrer que, pour tout réel *t*, on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t^2} \geq 1 - t^2$.

d) En déduire que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ puis donner la limite de la suite (u_n).

4) Calculer $\int_0^1 (1-t)^n \, dt$ puis montrer que $u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

5) a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

b) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

c) On admet l'équivalent $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. En écrivant $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

6) Informatique.
On admet que, si `t` est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de `t`.
Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=1:n
m=2*n+1
y=1:m
v=----
w=----
u=----*v^2/w
disp(u)
```

Problème

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cet exercice, θ (theta) désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

2) Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

3) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ.

4) a) Montrer que l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.

b) Montrer que : $\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right],\ 2^x(1-x)\leq 1$.

c) Comparer $E(X)$ et M_e.

5) Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.

a) Montrer que $P_{(X>a)}(X>a+b)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$.

b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : simulation de X

6) On pose $Y=\ln X$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que *X*. On note *G* sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel *x*, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction *F*.

b) En déduire que *Y* suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

7) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire des commandes `Scilab` utilisant `grand` et permettant de simuler *X*.

Partie 3 : estimation d'un paramètre

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on souhaite en trouver une estimation ponctuelle puis par intervalle de confiance.
On considère pour cela *n* variables aléatoires $Y_1,\ldots,Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

8) On pose $T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

a) Justifier que T_n est un estimateur de θ.

b) T_n est-il un estimateur sans biais de θ ?

c) Calculer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de θ. T_n est-il un estimateur convergent de θ ?

9) a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable T_n.

b) Établir l'inégalité :

$$\forall \varepsilon>0,\ P(\theta\in[T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon])\geq 1-\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$

c) En utilisant le fait que $\theta\leq\frac{1}{2}$, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% lorsque l'on choisit $n=1000$.

Maths ECE 2019 ....Éléments de correction

Exercice 1 ....

1) a) On trouve

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) En développant on a $A(2I-A)=I$, ce qui prouve que A est inversible avec de plus :

$$\boxed{A^{-1}=2I-A}$$

2) a) On a (binôme) : $A^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k$.

Comme $N^2=0$, pour tout entier $k\geq 2$, on a $N^k=0$, ce qui fait que seuls les deux premiers termes de la somme donnant A^n sont non nuls (pour $n\geq 2$).

On trouve : $\forall n\geq 2,\ A^n=I+nN$.

On voit que cette relation reste valable pour $n=0$ (elle donne $I=I$) et $n=1$ (elle donne $A=I+N$, ce qui est correct).

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=I+nN}$$

On en déduit, avec $N=A-I$:

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=nA-(n-1)I}$$

b) Pour $n=-1$, la relation ci-dessus donne $A^{-1}=(-1)A-(-2)I=2I-A$, ce qui correspond bien au résultat trouvé à la question 1b).

3) a) Le polynôme $X^2-2X+1=(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A donc 1 est la seule valeur propre possible de A.

On vérifie que 1 est effectivement valeur propre de A en remarquant que la matrice $A-I=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ n'est pas inversible

b) Si A était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P telle que $A=PIP^{-1}=PP^{-1}=I$. Ceci étant manifestement faux, on conclut que A n'est pas diagonalisable.

4) a) La matrice $A-I=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ est de rang 1 donc :

$$\boxed{\operatorname{rg}(f-Id)=1}$$

b) Vérifions d'abord que u_1 et u_2 appartiennent à $\operatorname{Ker}(f-Id)$

- On a $u_1=(f-Id)(e_1)$ et on trouve $u_1=(-1,-2,1)$. Ensuite, on vérifie matriciellement que $(f-Id)(u_1)=0$.

$$\boxed{u_1 \text{ appartient à } \operatorname{Ker}(f-Id)}$$

- Pour $u_2=(1,0,1)$, on fait le même travail :

$$\boxed{u_2 \text{ appartient à } \operatorname{Ker}(f-Id)}$$

Comme $\operatorname{rg}(f-Id)=1$, on a $\dim(\operatorname{Ker}(f-Id))=2$. De plus, la famille (u_1,u_2) est une famille libre de 2 vecteurs de $\operatorname{Ker}(f-Id)$ donc on est certain que :

$$\boxed{(u_1,u_2) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f-Id)}$$

5) a) En considérant trois réels a, b et c tels que $au_1+bu_2+ce_1=0$, on obtient : $(-a+b+c,-2a,a+b)=(0,0,0)$. On trouve rapidement $a=0$, $b=0$ et $c=0$.
Par conséquent, la famille (u_1,u_2,e_1) est libre et comme elle contient trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3, on peut conclure :

$$\boxed{(u_1,u_2,e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

b) Comme $u_1\in\operatorname{Ker}(f-Id)$, on a $f(u_1)=u_1$. De même, on a $f(u_2)=u_2$.

Enfin, $u_1 = (f - Id)(e_1)$ donc $u_1 = f(e_1) - e_1$ et on en déduit : $f(e_1) = u_1 + e_1$.
On trouve donc :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

6) La matrice P est inversible en tant que matrice de changement de base.
Comme A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et comme T est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, e_1), on a la formule de changement de base :

$$\boxed{A = PTP^{-1}}$$

7) a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Après calculs, on trouve : $M \in E \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & v & w \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

En conclusion, E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})$. Cette famille étant libre (facile à vérifier) c'est une base de E, et comme elle contient 5 vecteurs, on a :

$$\boxed{\dim E = 5}$$

b) Comme $A = PTP^{-1}$, on a :

$$NA = AN \Leftrightarrow N(PTP^{-1}) = (PTP^{-1})N \Leftrightarrow NPTP^{-1} = PTP^{-1}N$$

Comme P et P^{-1} sont inversibles, on obtient une égalité équivalente en multipliant par P^{-1} à gauche, puis par P à droite dans chaque membre de l'égalité $NPTP^{-1} = PTP^{-1}N$, ce qui donne :

$$\boxed{NA = AN \Leftrightarrow (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)}$$

c) On en déduit qu'une matrice N commute avec A si et seulement si $P^{-1}NP$ commute avec T, c'est-à-dire si $P^{-1}NP$ appartient à E.
En traduisant ceci, on trouve :

$$N = aP(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1} + bPE_{1,2}P^{-1} + cPE_{1,3}P^{-1} + vPE_{2,2}P^{-1} + wPE_{2,3}P^{-1}$$

Ceci prouve que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :

$$\left(P\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right)P^{-1},\ PE_{1,2}P^{-1},\ PE_{1,3}P^{-1},\ PE_{2,2}P^{-1},\ PE_{2,3}P^{-1}\right)$$

Exercice 2 ....

1) On a

$$\boxed{X(\Omega)=[\![1,n]\!]}$$

2) a) Pour tout i de $[\![2,n-1]\!]$, tout d'abord, l'événement $B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}$ n'est pas quasi impossible, et sachant qu'il est réalisé, alors au moment de faire le i-ième tirage, il manque $i-1$ boules blanches donc il reste $(n-1)-(i-1)=n-i$ boules blanches dans l'urne et $n-i+1$ boules en tout.

Conclusion :

$$\boxed{P_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i)=\frac{n-i}{n-i+1}}$$

b) Pour $k=1$, on a $(X=1)=N_1$ donc $P(X=1)=P(N_1)=\dfrac{1}{n}$.

Sinon, on a : $\forall k\geq 2$, $(X=k)=B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap N_k$.

La formule des probabilités composées s'écrit alors :

$$\forall k\geq 2,\ P(X=k)=P(B_1)P_{B_1}(B_2)\ldots P_{B_1\cap\ldots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}}(N_k)$$

En remplaçant les probabilités calculées à la question 2a) :

$$P(X=k)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\ldots\times\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\times\frac{1}{n-(k-1)}$$

On trouve : $\forall k\geq 2$, $P(X=k)=\dfrac{1}{n}$.

Cette formule étant valable pour $k=1$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall k\in[\![1,n]\!],\ P(X=k)=\frac{1}{n}}$$

c) On reconnaît que X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et d'après le cours, on en déduit :

$$\boxed{E(X)=\frac{n+1}{2}\ \text{et}\ V(X)=\frac{n^2-1}{12}}$$

3) a) Pour $k=1$, on a $(X=1)\cap(Y=0)=N_1$ donc $P([X=1]\cap[Y=0])=\dfrac{1}{n}$.

Sinon, $(X=k)\cap(Y=0)=B'_1\cap\ldots\cap B'_{k-1}\cap N_k$, où on a noté B'_i l'événement « le i-ième tirage donne une boule blanche numérotée 0 ». On en déduit :

$$\forall k \geq 2,\ P\big([X=k]\cap[Y=0]\big) = P(B_1')P_{B_1'}(B_2')\ldots P_{B_1'\cap\ldots\cap B_{k-2}'}(B_{k-1}')P_{B_1'\cap\ldots\cap B_{k-1}'}(N_k)$$

En remplaçant les probabilités, on obtient :

$$\forall k \geq 2,\ P\big([X=k]\cap[Y=0]\big) = \frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\ldots\times\frac{n-k}{n-k+2}\times\frac{1}{n-k+1}$$

Après simplifications : $P\big([X=k]\cap[Y=0]\big) = \dfrac{(n-2)!}{(n-k-1)!}\times\dfrac{(n-k)!}{n!} = \dfrac{n-k}{n(n-1)}$.

Cette formule étant valable pour $k=1$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ P\big([X=k]\cap[Y=0]\big) = \frac{n-k}{n(n-1)}}$$

b) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ s'écrit :

$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{n} P\big([X=k]\cap[Y=0]\big) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(n-k)$$

On obtient alors :

$$\boxed{P(Y=0) = \frac{1}{2}}$$

c) On en déduit $P(Y=1) = \dfrac{1}{2}$ donc Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

On a alors :

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{2} \text{ et } V(Y) = \frac{1}{4}}$$

4) a) On peut proposer ce qui suit :

```
(1)  n=input('entrez une valeur pour n : ')
(2)  nB=n-1
(3)  X=1
(4)  u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
(5)  while u<nB+1
(6)     nB=nB-1
(7)     u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
(8)     X=X+1
(9)  end
(10) disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage N°')
```

b) On peut proposer :

```
(4)  Y=0
(8)  if u==1 then Y=1
```

Exercice 3 ....

1) On trouve $u_1 = \dfrac{2}{3}$ et $u_2 = \dfrac{8}{15}$.

2) a) On a : $u_{n+1} - u_n = -\int_0^1 t^2 \left(1-t^2\right)^n dt \leq 0$. Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } \left(u_n\right) \text{ est décroissante}}$$

b) Comme u_n est positif, la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante et minorée donc elle est convergente.

3) a) D'après le cours sur la loi normale, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1$, ce que l'on peut écrire : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \sigma\sqrt{2\pi}$.

b) En posant $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, qui est bien strictement positif, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Par parité de la fonction intégrée, on en déduit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

c) On peut étudier la fonction $t \mapsto e^{-t^2} + t^2 - 1$ ou invoquer la convexité de la fonction exponentielle pour obtenir :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t^2} \geq 1 - t^2}$$

d) On trouve assez vite : $\forall t \in [0,1]$, $e^{-nt^2} \geq \left(1-t^2\right)^n \geq 0$

On intègre, ce qui donne $0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt$, que l'on prolonge en :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$$

D'après la question 3b), on obtient : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

On conclut :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

4) On a $\int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{n+1}$.

Comme $\left(1-t^2\right)^n \geq (1-t)^n$, on obtient en intégrant ces fonctions continues, bornes dans l'ordre croissant : $u_n \geq \int_0^1 (1-t)^n \, dt$. On trouve bien :

$$\boxed{u_n \geq \frac{1}{n+1}}$$

On peut alors conclure que la série de terme général u_n diverge.

5) a) Par intégration par parties dans l'intégrale $u_{n+1} = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1} dt$, avec $u(t) = t$ et $v(t) = \left(1-t^2\right)^{n+1}$, on trouve :

$$u_{n+1} = \left[t\left(1-t^2\right)^{n+1} \right]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 t^2 \left(1-t^2\right)^n dt$$

Ceci donne bien :

$$\boxed{u_{n+1} = (2n+2)\left(u_n - u_{n+1}\right)}$$

b) On procède par récurrence :

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $\frac{4^0 (0!)^2}{(2\times 0+1)!} = \frac{1!}{1!} = 1$ donc l'initialisation est faite.
- Si l'on suppose, pour un certain entier naturel n que $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$, alors

d'après la relation encadrée précédente, on a : $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$.

On obtient : $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{2n+2}{2n+2} = \frac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n+3)!}$,

ce qui établit l'hérédité. Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}}$$

c) L'énoncé conseille d'écrire : $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$.

Comme $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$, on a $(n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} 2\pi n \times n^{2n} e^{-2n}$ et $(2n)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}\, e^{-2n}$,

on obtient après calculs : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n+1} \times \sqrt{\pi n}$.

Soit encore :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

6) On propose

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=1:n
m=2*n+1
y=1:m
v=prod(x)
w=prod(y)
u=4^n*v^2/w
disp(u)
```

Problème ....

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

1)
- La fonction f est positive.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 1.
- $\int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt = 0$ car f est nulle sur $]-\infty,1[$.

Pour tout $x \geq 1$, on a : $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = 1 - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}}$.

Comme $\dfrac{1}{\theta} > 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} = 0$ donc $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et, après passage à la limite, on a $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. Finalement, on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Les trois points précédents permettent de conclure :

$\boxed{f \text{ peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire } Y}$

2) Calcul de $E(X)$.
- Tout d'abord, on a $\int_{-\infty}^{1} t\, f(t)\,dt = 0$ car f est nulle sur $]-\infty,1[$.
- Pour tout $x \geq 1$, on trouve $(\theta \neq 1)$: $\int_{1}^{x} t\, f(t)\,dt = \dfrac{1}{\theta - 1}\left(x^{1-\frac{1}{\theta}} - 1\right)$.

Comme $0<\theta<\frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\frac{1}{\theta}}=0$.

Par conséquent, $\int_1^{+\infty} t\,f(t)\,dt$ converge et, après passage à la limite, on a :

$$\int_1^{+\infty} t\,f(t)\,dt=\frac{-1}{\theta-1}=\frac{1}{1-\theta}$$

Les deux points précédents prouvent que l'espérance de X existe et que :

$$\boxed{E(X)=\frac{1}{1-\theta}}$$

Calcul de $E(X^2)$.

- Tout d'abord, on a $\int_{-\infty}^1 t^2 f(t)\,dt=0$ car f est nulle sur $]-\infty,1[$.
- Pour tout $x\geq 1$, on a ($\theta\neq\frac{1}{2}$) :

$$\int_1^x t^2 f(t)\,dt=\frac{1}{2\theta-1}\left(x^{2-\frac{1}{\theta}}-1\right)$$

Comme $0<\theta<\frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2-\frac{1}{\theta}}=0$.

Par conséquent, $\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge et, après passage à la limite, on a :

$$\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\,dt=\frac{-1}{2\theta-1}=\frac{1}{1-2\theta}$$

Les deux points précédents prouvent que le moment d'ordre 2 de X existe et que :

$$E(X^2)=\frac{1}{1-2\theta}$$

La formule de Koenig-Huygens donne alors :

$$\boxed{V(X)=\frac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}}$$

3) Par définition, on a : $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\,dt$.

Ceci donne :

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}}$$

4) a) Comme F est nulle sur $]-\infty,1[$, l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ n'a pas de solution sur $]-\infty,1[$. Sur $[1,+\infty[$, $F(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^{\frac{1}{\theta}}=2\Leftrightarrow x=2^{\theta}$

Conclusion : la seule solution de l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ est $M_e=2^{\theta}$.

b) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ par $h(x)=2^x(1-x)$. On trouve (calcul de dérivée) que h est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et comme $h(0)=1$, on a $h(x)\leq 1$. Conclusion :

$$\boxed{\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\ 2^x(1-x)\leq 1}$$

c) D'après ce que l'on vient de voir, en l'appliquant avec $x=\theta$ qui est dans dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, et avec $E(X)=\frac{1}{1-\theta}$ et $M_e=2^{\theta}$, on a : $\frac{M_e}{E(X)}\leq 1$.

Comme tout est positif :

$$\boxed{M_e\leq E(X)}$$

5) a) On a, par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_{(X>a)}(X>a+b)=\frac{P([X>a]\cap[X>a+b])}{P(X>a)}$$

Comme b strictement positif, il reste :

$$P_{(X>a)}(X>a+b)=\frac{P(X>a+b)}{P(X>a)}$$

En remplaçant, grâce à la question 3), avec $a\geq 1$ et $a+b\geq 1$, on obtient :

$$\boxed{P_{(X>a)}(X>a+b)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}}$$

b) Lorsque a tend vers $+\infty$, $\frac{a}{a+b}$ tend vers 1 donc :

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty}P_{(X>a)}(X>a+b)=1}$$

Si X représente une durée de vie d'un certain appareil, ceci signifie que plus l'appareil est ancien (traduction "réaliste" de "a tend vers $+\infty$"), plus les chances de vivre encore plus longtemps sont grandes (traduction "réaliste" de la limite qui vaut 1).

Partie 2 : simulation de X

6) a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, ce qui garantit d'ores et déjà que : $\forall x < 0,\ G(x) = 0$.
Pour tout réel x positif, on a : $G(x) = P(Y \leq x) = P(\ln X \leq x) = P(X \leq e^x)$. On a donc :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} F(e^x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

b) Lorsque x est positif, on a :

$$F(e^x) = 1 - \frac{1}{(e^x)^{1/\theta}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{x}{\theta}}} = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$$

On en déduit $G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{\theta}x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, ce qui montre que :

$$\boxed{Y \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \frac{1}{\theta}}$$

7) On peut proposer :

```
theta=input('entrez theta entre 0 et 1/2 :')
Y=grand(1,1,'exp',theta)
X=exp(Y)
disp(X)
```

Partie 3 : estimation d'un paramètre

8) a) On a $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$ donc T_n est fonction de l'échantillon $(Y_1, ..., Y_n)$, mais pas fonction de θ. Ainsi T_n est un estimateur de θ.

b) Les variables Y_k ont toutes une espérance égale à θ, donc T_n a aussi une espérance et, par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta = \frac{1}{n} \times n\theta = \theta$$

Conclusion :

$$\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$$

c) Comme T_n est sans biais, on a $r_\theta(T_n) = V(T_n)$.

Par propriété de la variance et par mutuelle indépendance des variables $Y_1,...,Y_n$, on a : $V(T_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}V(Y_k)$, d'où : $V(T_n)=\frac{\theta^2}{n}$. Pour conclure, le risque quadratique de T_n est :

$$\boxed{r_\theta(T_n)=\frac{\theta^2}{n}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n)=0$, on peut affirmer (c'est une condition suffisante) que T_n est un estimateur convergent de θ.

9) a) D'après le cours, comme T_n a une espérance et une variance, on a :

$$\forall\varepsilon>0,\ P(|T_n-E(T_n)|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$$

En remplaçant espérance et variance, on trouve :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ P(|T_n-\theta|\geq\varepsilon)\leq\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}}$$

b) En passant à l'événement contraire, on obtient : $P(|T_n-\theta|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$.

Ceci peut s'écrire, après quelques transformations :

$$P(\theta\in\,]T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon[)\geq 1-\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \qquad (1)$$

Comme on a l'inclusion $(\theta\in\,]T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon[)\subset(\theta\in[T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon])$, on en déduit :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ P(\theta\in[T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon])\geq 1-\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}}$$

c) Avec $\theta\leq\frac{1}{2}$, on a : $1-\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}\geq 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}$. On peut donc prolonger l'inégalité obtenue à la question 9b), ce qui donne : $\forall\varepsilon>0,\ P(\theta\in[T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon])\geq 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}$

Avec $n=1000$, on obtient : $\forall\varepsilon>0,\ P(\theta\in[T_{1000}-\varepsilon,T_{1000}+\varepsilon])\geq 1-\frac{1}{4000\varepsilon^2}$.

On voit qu'il suffit de prendre $\varepsilon=\frac{1}{20}=0,05$ pour avoir le niveau de confiance 90%. L'intervalle de confiance cherché est donc : $[T_{1000}-0,05\ ;\ T_{1000}+0,05]$.