BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

7 mai 2019, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Partie 1 : étude d'un exemple

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

c) En `Scilab`, la commande `r=rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice M.

On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,'r2=')
```

`Scilab` a renvoyé :

```
r1  =
      1.
r2  =
      2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

d) Donner une base de chacun des noyaux $\text{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et $\text{Ker}(f-\lambda_2 Id)$.

2) a) Justifier qu'il existe une base (u_1,v_1,v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1,v_1) est une base de $\text{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et (v_2) une base de $\text{Ker}(f-\lambda_2 Id)$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.

b) On note $x=(a,b,c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1,v_1,v_2).

Partie 2 : généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p$, deux à deux distinctes.
On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p}\text{Ker}(f-\lambda_k Id)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

3) Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.

a) En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$(D-\lambda_1 I_n)(D-\lambda_2 I_n)...(D-\lambda_p I_n)=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

b) En déduire un polynôme annulateur de f.

Pour chaque k de $[\![1,p]\!]$, on définit le polynôme $L_k=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\frac{X-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$.

4) a) En distinguant les cas $i=k$ et $i\neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

b) Montrer que $(L_1,L_2,...,L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) Établir alors que :

$$\forall P\in\mathbb{R}_{p-1}[X],\ P=\sum_{k=1}^{p}P(\lambda_k)L_k$$

d) En déduire que $\sum_{i=1}^{p}L_i=1$.

5) a) Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\text{Ker}(f-\lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.

b) En déduire la décomposition cherchée.

6) Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n=3$, $E=\mathbb{R}^3$ et $p=2$.

Exercice 2

Partie 1 : question préliminaire et présentation de deux variables aléatoires X et T

1) On rappelle que la fonction arc tangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

a) Rappeler l'expression, pour tout réel x, de $\operatorname{Arctan}'(x)$.

b) Donner la valeur de $\operatorname{Arctan}(1)$ puis montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

c) Justifier l'équivalent suivant :

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$$

2) a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

3) a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer la fonction de répartition G de T.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires associée à X

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1,...,X_{,n})$ et on admet que M_n est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

4) a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

b) On pose, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{\pi}{n} M_n$. Justifier que la fonction de répartition de Y_n, notée G_n, est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n$$

5) a) Déterminer, pour tout x négatif ou nul, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

b) Montrer que, pour tout x strictement positif, on a :

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n$$

c) En déduire pour tout x strictement positif, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

d) Déduire des questions précédentes que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\| x \|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E.
Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté u^*, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^*(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

1) a) Montrer que si u^* existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$

b) En déduire que si u^* existe, alors u^* est unique.

2) a) Vérifier que l'application u^* définie par l'égalité établie à la question 1a) est effectivement un endomorphisme de E.
b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.
On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité :

$$u \circ u^* = u^* \circ u$$

3) Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4) a) Montrer que : $\forall x \in E,\ \| u(x) \| = \| u^*(x) \|$.
b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$.

5) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

6) On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.
a) Montrer que E_λ est stable par u^*.
b) Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Problème

Partie 1
Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k) t^k$$

1) Calculer $G(1)$.

2) Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

3) Établir la relation : $V(X) = G''(1) + G'(1) - \left(G'(1)\right)^2$.

Partie 2

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4) a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.

   b) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\ln n + \frac{1}{n} \leq u_n \leq \ln n + 1$.

   c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5) Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie 3

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

6) On admet que, si a et b sont des entiers tels que $a < b$, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` permet à `Scilab` de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme discrète sur $[\![a,b]\!]$.
Compléter le script suivant pour que les lignes (5), (6), (7) et (8) permettent d'échanger les contenus des variables `A(j)` et `A(p)`.

```
(1)   n=input('entrez une valeur pour n :')
(2)   A=1:n
(3)   p=n
(4)   for k=1:n
(5)       j=grand(1,1,'uin',1,p)
(6)       aux=----
(7)       A(j)=-----
(8)       A(p)=-----
(9)       p=p-1
(10)  end
(11)  disp(A)
```

7) On suppose dorénavant qu'après exécution du script précédent correctement complété, le vecteur `A` est rempli de façon aléatoire par les entiers de $[\![1,n]\!]$ de telle sorte que les $n!$ permutations soient équiprobables.
On considère alors les commandes `Scilab` suivantes (exécutées à la suite du script précédent) :

```
m=A(1)
c=1
for k=2:n
   if A(k)>m then m=A(k)
                  c=k
   end
end
disp(c)
```

a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

b) Quel est le contenu de la variable `c` affiché à la fin de ces commandes ?

c) On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `find(test)` permet de trouver à quelle(s) place(s) se trouvent les éléments d'une matrice satisfaisant au test proposé.

Compléter le script `Scilab` ci-dessous afin qu'il renvoie et affiche le contenu de la variable `c` étudiée plus haut :

```
c=find(---)
disp(c)
```

On admet que les contenus des variables `A(1)`, `A(2)`, ..., `A(n)` sont des variables aléatoires notées A_1, A_2, ..., A_n et que le nombre d'affectations concernant la variable informatique c effectuées au cours du script présenté au début de la question 7), y compris la première, est aussi une variable aléatoire, notée X_n.

On suppose que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note G_n la fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

8) Donner la loi de X_1.

9) a) Montrer que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

c) En considérant le système complet d'événements $\big((A_n = n), (A_n < n)\big)$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ P(X_n = j) = \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)$$

d) Donner la loi de X_4.

10) a) Vérifier que la formule obtenue à la question 9c) reste valable pour $j = 1$.

b) Établir la relation :

$$\forall n \geq 2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t) \qquad (*)$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

11) En dérivant la relation $(*)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n$$

12) Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation $(*)$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

c) Montrer que $V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Maths ECS 2019 ....Éléments de correction

Exercice 1 ....

1) a) Après calculs, on trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ puis $A^2 - 3A + 2I = 0$.

Conclusion :

$$\boxed{X^2 - 3X + 2 \text{ est un polynôme annulateur de } A}$$

b) Les racines de ce polynôme sont 1 et 2 donc 1 et 2 sont les valeurs propres possibles de A.

c) Le script nous enseigne que $\text{rg}(A - I) = 1$ et $\text{rg}(A - 2I) = 2$, ce qui permet de conjecturer que 1 et 2 sont bien valeurs propres de A.
Avec la question 1b), on peut conjecturer :

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{1, 2\}}$$

D'après le théorème du rang, on peut conjecturer que les dimensions des sous-espaces propres de *f* sont :

$$\boxed{\dim(\text{Ker}(f - Id)) = 3 - 1 = 2 \text{ et } \dim(\text{Ker}(f - 2Id)) = 3 - 2 = 1}$$

d) • On résout $(A - I)X = 0$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui donne $X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$\text{Ker}(f - Id) = \text{Vect}\big((1,1,0),(0,1,1)\big)$$

La famille $\big((1,1,0),(0,1,1)\big)$ est libre (deux vecteurs non proportionnels) et génératrice de $\text{Ker}(f - Id)$ donc c'est une base de $\text{Ker}(f - Id)$, ce qui confirme la dimension 2 trouvée plus haut.

$$\boxed{\text{Une base de } \text{Ker}(f - Id) \text{ est } \big((1,1,0),(0,1,1)\big)}$$

• On résout $(A-2I)X=0$, ce qui donne cette fois $X=\begin{pmatrix}0\\2z\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow X=z\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

On en déduit : $\mathrm{Ker}(f-2Id)=\mathrm{Vect}\big((0,2,1)\big)$.

La famille $\big((0,2,1)\big)$ est libre (un vecteur non nul) et génératrice de $\mathrm{Ker}(f-2Id)$ donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(f-2Id)$, ce qui confirme la dimension 1 trouvée plus haut.

$$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Ker}(f-2Id) \text{ est } \big((0,2,1)\big)}$$

2) a) On a donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(f-Id)\big)+\dim\big(\mathrm{Ker}(f-2Id)\big)=3$ donc 1 et 2 sont bien les seules valeurs propres de *f* et *f* est diagonalisable. On sait qu'on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ en concaténant des bases de $\mathrm{Ker}(f-Id)$ et de $\mathrm{Ker}(f-2Id)$.

Ainsi, la famille $\big((1,1,0),(0,1,1),(0,2,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Comme (u_1, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^3$, alors il existe trois réels α, β et γ tels que $(a,b,c)=\alpha u_1+\beta v_1+\gamma v_2$,

On trouve par identification : $\begin{cases}\alpha=a\\ \gamma=b-a-c\\ \beta=2c-b+a\end{cases}$.

Conclusion :

$$\boxed{x=\underbrace{au_1+(2c-b+a)v_1}_{\in\mathrm{Ker}(f-Id)}+\underbrace{(b-a-c)v_2}_{\in\mathrm{Ker}(f-2Id)}}$$

3) a) La diagonale de la matrice *D* est de la forme $(\lambda_1 \ldots \lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_2 \ldots \lambda_p \ldots \lambda_p)$, avec un certain nombre de "λ_1", de "λ_2", …, de "λ_p".

La diagonale de la matrice $D-\lambda_1 I$ est donc : $(0 \ldots 0\ \lambda_2 \ldots \lambda_2 \ldots \lambda_p \ldots \lambda_p)$, celle de $D-\lambda_2 I$ est $(\lambda_1 \ldots \lambda_1\ 0 \ldots 0\, \lambda_3 \ldots \lambda_3 \ldots\ \lambda_p \ldots \lambda_p)$, et ainsi de suite jusqu'à la diagonale de $D-\lambda_p I$ qui est $(\lambda_1 \ldots \lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_2 \ldots 0 \ldots 0)$. Comme le produit de matrices diagonales est obtenu en multipliant les coefficients diagonaux de chacune d'entre elles, il est certain que :

$$\boxed{(D-\lambda_1 I)(D-\lambda_2 I)\ldots(D-\lambda_p I)=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$$

b) Le polynôme $(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_p)$ est donc annulateur de *D*, mais *D* est une matrice de *f* dans une certaine base donc :

$$\boxed{(X-\lambda_1)...(X-\lambda_p) \text{ est un polynôme annulateur de } f}$$

4) a) On trouve :

$$\boxed{L_k(\lambda_i)=\begin{cases}1 \text{ si } i=k\\ 0 \text{ si } i\neq k\end{cases}}$$

b) • Il faut noter tout d'abord que les L_k appartiennent à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

• Liberté : soit p réels $a_1,...,a_p$ tels que $\sum_{k=1}^{p} a_k L_k = 0$. Pour tout entier i de $[\![1,p]\!]$, si on évalue en λ_i, on obtient : $\sum_{k=1}^{p} a_k L_k(\lambda_i)=0$, soit $a_i=0$.

Ainsi, la famille $(L_1,L_2,...,L_p)$ est libre.

• Comme la famille $(L_1,L_2,...,L_p)$ contient p vecteurs de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ qui est de dimension p, on peut conclure :

$$\boxed{(L_1,L_2,...,L_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{p-1}[X]}$$

c) Tout polynôme P de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ peut s'écrire $P=\sum_{i=1}^{p} a_i L_i$. En évaluant cette égalité en λ_k, on trouve : $P(\lambda_k)=a_k$. En remplaçant, on a bien :

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{R}_{p-1}[X],\ P=\sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k)L_k}$$

d) En appliquant la relation précédente au polynôme constant égal à 1, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} L_k = 1}$$

5) a) On a, pour tout x de E :

$L_k(f)(x)=$

$$\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\Big)\big((f-\lambda_1 Id)\circ...(f-\lambda_{k-1}Id)\circ(f-\lambda_{k+1}Id)\circ...(f-\lambda_p Id)\big)(x)$$

En appliquant $f-\lambda_k Id$ et en remarquant que $f-\lambda_k Id$ commute avec $f-\lambda_j Id$ on trouve par linéarité de $f-\lambda_k Id$:

$(f-\lambda_k Id)\,(L_k(f)(x))=$

$$\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\right)\Big(\big(f-\lambda_1 Id\big)\circ\ldots\circ\big(f-\lambda_k Id\big)\circ\ldots\circ\big(f-\lambda_p Id\big)\Big)(x)$$

D'après la question 3b), $(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_k)\ldots(X-\lambda_p)$ est un polynôme annulateur de *f*, on obtient donc $(f-\lambda_k Id)\big(L_k(f)(x)\big)=0$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall x\in E\,,\ L_k(f)(x)\in\mathrm{Ker}(f-\lambda_k Id)}$$

b) En appliquant l'égalité $\sum_{k=1}^{p}L_k=1$ à l'endomorphisme *f*, on a : $\sum_{k=1}^{p}L_k(f)=Id$.
En appliquant cette nouvelle égalité à un vecteur *x* quelconque de *E*, on a cette fois :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p}L_k(f)(x)=x}$$

Ceci donne bien la décomposition de *x* sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}(f-\lambda_k Id)$, puisque, pour tout *k* de $[\![1,p]\!]$, on a vu que $L_k(f)(x)\in\mathrm{Ker}(f-\lambda_k Id)$.

6) Avec $n=3$, $E=\mathbb{R}^3$ et $p=2$, et comme $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$, on a :

$$L_1=-(X-2)\ \text{ et }\ L_2=X-1$$

D'après la question précédente, on en déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\ x=L_1(f)(x)+L_2(f)(x)=\underbrace{-(f-2Id)(x)}_{\in\mathrm{Ker}(f-Id)}+\underbrace{(f-Id)(x)}_{\in\mathrm{Ker}(f-2Id)}$$

On vérifie alors que
- $-(f-2Id)(x)=(a,2a-b+2c,2c+a-b)=au_1+(2c-b+a)v_1$
- $(f-Id)(x)=(0,-2a+2b-2c,-a+b-c)=(b-a-c)v_2$.

Exercice 2 ....

Partie 1 : question préliminaire et présentation de 2 variables aléatoires X et T

1) a) Pour tout réel *x*, on a :

$$\boxed{\mathrm{Arctan}'(x)=\frac{1}{x^2+1}}$$

b) On a :

$$\boxed{\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}}$$

Pour tout réel x strictement positif, posons : $h(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on trouve $h'(x) = 0$ donc h est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, et comme $h(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

c) La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 s'écrit : $\text{Arctan}(x) \underset{0}{=} x + o(x)$.
On a donc l'équivalent :

$$\boxed{\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x}$$

2) a) • La fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ sans problème.

- La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ ($x^2 + 1 > 0$).
- Pour tout $A \geq 0$, on a : $\int_0^A f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(A)$.

Comme $\lim\limits_{A \to +\infty} \text{Arctan}(A) = \frac{\pi}{2}$, on a la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ ainsi que sa valeur :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

- La fonction f étant paire, on en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Conclusion : f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

b) Par définition, on a :

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}(x) - \lim\limits_{B \to -\infty} \text{Arctan}(B)\right)$

On en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x) + \frac{1}{2}}$$

3) a) • Sur $\mathbb{R}_+^*$, g est bien définie et positive (car la fonction exp est positive) et sur $\mathbb{R}_-$, g est nulle donc positive ou nulle.

- La restriction de g à $\mathbb{R}_+^*$ est continue comme quotient bien défini de fonctions continues et la restriction de g à $\mathbb{R}_-$ est continue car nulle.
- L'intégrale $\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx$ est nulle car g est nulle sur $\mathbb{R}_-$.

$\rightarrow$ Pour tout $a > 0$, on a :

$$\int_a^1 g(x)\,dx = \frac{1}{e} - e^{-1/a}$$

Ainsi, $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{e}$.

$\rightarrow$ Pour tout $A \geq 1$, on a :

$$\int_1^A g(x)\,dx = e^{-1/A} - \frac{1}{e}$$

Ainsi, $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge et vaut $1 - \frac{1}{e}$.

On peut conclure que $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Conclusion : g peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Par définition, on a : $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$

On trouve alors :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires associée à X

4) a) On a $F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]\right)$

Comme X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi que X, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{M_n}(x) = \left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x) + \frac{1}{2}\right)^n}$$

b) $Y_n = \frac{\pi}{n} M_n$ donc, pour tout réel x, on a : $G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(M_n \leq \frac{nx}{\pi}\right)$.

On a donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n}$$

5) a) Pour tout x négatif ou nul, on a $G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n$.

Comme x est négatif, on a $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) \leq 0$.

On en déduit : $0 < \left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Par encadrement, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \leq 0,\ \lim_{n \to +\infty} G_n(x) = 0}$$

b) D'après la question 1b), avec x strictement positif, on a :

$$\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)$$

On en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n}$$

c) Pour tout x strictement positif, on peut écrire :

$$G_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)\right)$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right) = 0$, on a l'équivalent :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)$$

On en déduit :

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$$

Par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{1}{x}$, on trouve donc :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \lim_{n \to +\infty} G_n(x) = e^{-1/x}}$$

d) On constate, grâce aux questions 5a) et 5c), que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T.

Exercice 3 ....

1) a) Si u^* existe, on a, par orthonormalité de la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$:

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u^*(y), e_i \rangle e_i$$

Par définition de u^*, on a : $u^*(y)=\sum_{i=1}^{n}\langle y,u(e_i)\rangle e_i$ et enfin (symétrie du ps) :

$$\boxed{u^*(y)=\sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i),y\rangle e_i}$$

b) Pour chaque vecteur y de E, $u^*(y)$ est ainsi déterminé de façon unique. Par conséquent, si u^* existe, alors u^* est unique.

2) a) • Pour tout y de E, la relation $u^*(y)=\sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i),y\rangle e_i$ prouve que $u^*(y)\in E$.

• Par bilinéarité du produit scalaire, on trouve assez vite :

$$u^*(y+az)=u^*(y)+au^*(z)$$

Conclusion :

$$\boxed{u^* \text{ est un endomorphisme de } E}$$

b) D'après les trois questions précédentes, l'endomorphisme u^* défini à la question 1a) est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle$$

3) Si u est un endomorphisme symétrique, alors :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle u(x),y\rangle=\langle x,u(y)\rangle$$

Par unicité de u^*, on en déduit : $\forall y\in E$, $u^*(y)=u(y)$.

Conclusion : un endomorphisme symétrique est normal et il est son propre adjoint.

4) a) En appliquant la relation définissant u^*, mais en remplaçant y par $u(x)$, on obtient :

$$\forall x\in E,\ \|u(x)\|^2=\langle u(x),u(x)\rangle=\langle x,u^*(u(x))\rangle=\langle x,(u^*\circ u)(x)\rangle$$

Comme u est un endomorphisme normal, on a $u^*\circ u=u\circ u^*$, ce qui permet d'écrire, avec la symétrie du produit scalaire :

$$\forall x\in E,\ \|u(x)\|^2=\langle u(u^*(x)),x\rangle$$

Enfin, encore une fois par définition de u^*, on obtient :

$$\forall x\in E,\ \|u(x)\|^2=\langle u^*(x),u^*(x)\rangle=\|u^*(x)\|^2$$

Comme une norme est positive, on a bien :

$$\boxed{\forall x\in E,\ \|u(x)\|=\|u^*(x)\|}$$

b) On a les équivalences suivantes :

$$x\in \operatorname{Ker}(u)\Leftrightarrow u(x)=0\Leftrightarrow \|u(x)\|=0\Leftrightarrow \|u^*(x)\|=0\Leftrightarrow u^*(x)=0\Leftrightarrow x\in \operatorname{Ker}(u^*)$$

On peut conclure :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^*)}$$

5) Soit x un vecteur de $F^{\perp}$. Montrons que $u^*(x) \in F^{\perp}$.
Par définition de l'adjoint, on a : $\forall y \in F$, $\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.
Comme $u(y) \in F$ et comme x est un vecteur de $F^{\perp}$, on a $\langle x, u(y)\rangle = 0$. On en déduit : $\forall y \in F$, $\langle u^*(x), y\rangle = 0$.
Cette égalité prouve que $u^*(x)$ appartient à $F^{\perp}$.
On peut donc conclure que $F^{\perp}$ est stable par u^*.

6) a) Soit x un vecteur de E_λ. On a, par définition de E_λ : $u(x) = \lambda x$.
En appliquant u^* à la relation $u(x) = \lambda x$, et comme $u \circ u^* = u^* \circ u$, on obtient après quelques étapes : $u(u^*(x)) = \lambda u^*(x)$.
Ceci prouve que $u^*(x) \in E_\lambda$
Conclusion :

$$\boxed{E_\lambda \text{ est stable par } u^*}$$

b) $(u^*)^*$ est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u^*(x), y\rangle = \left\langle x, (u^*)^*(y)\right\rangle$$

Mais, par définition de u^*, on a :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

Par unicité de l'adjoint de u^*, on a : $(u^*)^* = u$.
Grâce à la question 5), comme E_λ est stable par u^*, alors $E_\lambda^{\perp}$ est stable par $(u^*)^*$, c'est-à-dire stable par u.
Conclusion :

$$\boxed{E_\lambda^{\perp} \text{ est stable par } u}$$

Problème ....

Partie 1

1) Comme $(X = k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements, on obtient :

$$\boxed{G(1) = 1}$$

2) Comme $G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)t^k$, on a, par linéarité de la dérivation :

$$G'(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)kt^{k-1}$$

En prenant $t=1$, on trouve : $G'(1)=\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)=E(X)$

3) En dérivant encore une fois, on a $G''(t)=\sum_{k=2}^{n} P(X=k)k(k-1)t^{k-2}$ et on trouve : $G''(1)=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k)$. On en déduit : $G''(1)=E(X^2-X)$ et, par linéarité de l'espérance : $G''(1)=E(X^2)-E(X)$.

Comme $E(X)=G'(1)$, on arrive, grâce au théorème de Koenig-Huygens, à :

$$\boxed{V(X)=G''(1)+G'(1)-(G'(1))^2}$$

Partie 2

4) a) On sait que, pour tout entier naturel *k* non nul, on a :

$$\ln(k+1)-\ln k=\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt$$

De plus, pour tout t de $[k,k+1]$, on a $\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{t}\le\frac{1}{k}$. En intégrant ces fonctions continues, bornes dans l'ordre croissant, on obtient bien :

$$\boxed{\frac{1}{k+1}\le\ln(k+1)-\ln k\le\frac{1}{k}}$$

b) En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à $n-1$ (avec $n\ge 2$), on trouve, après simplification de la somme du milieu (télescopage) :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\le\ln n\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

Après changement d'indice et "recentrage", on a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln n+\frac{1}{n}\le u_n\le\ln n+1}$$

c) En divisant tout par $\ln n>0$ dès que $n\ge 2$, on trouve :

$$1+\frac{1}{n\ln n}\le\frac{u_n}{\ln n}\le 1+\frac{1}{\ln n}$$

On en déduit, par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\ln n}=1$.

Conclusion :

$$\boxed{u_n\underset{+\infty}{\sim}\ln n}$$

5) La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles d'une série de Riemann convergente (de paramètre $2>1$) donc, par définition de la convergence d'une série :

$$\boxed{\text{La suite } (h_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$$

Partie 3

6) On peut proposer le script suivant :

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
A=1:n
p=n
for k=1:n
    j=grand(1,1,'uin',1,p)
    aux=A(j)
    A(j)=A(p)
    A(p)=aux
    p=p-1
end
disp(A)
```

7) a) À la fin du script, la variable `m` contiendra la plus grande valeur du vecteur `A`, à savoir n.

b) La variable `c` contiendra, en fin de script, la place du nombre n dans le vecteur `A`.

c) Sachant maintenant que `c` contient la place du nombre n, on peut proposer :

```
c=find(A==n)
disp(c)
```

8) Si $n=1$, le vecteur `A` ne contient qu'un élément donc il n'y a pas de boucle `for` et la variable `c` reste égale à 1.

$$\boxed{X_1 \text{ est la variable certaine égale à } 1}$$

9) a) Comme la variable `c` a au minimum une affectation (`c=1`), et comme `c` peut changer de valeur entre 0 et $n-1$ fois dans la boucle (au maximum une fois par passage dans la boucle si le vecteur de départ est `A=1:n`), on a :

$$\boxed{X_n(\Omega)=[\![1,n]\!]}$$

b) • L'événement $(X_n = 1)$ est réalisé lorsque la variable informatique `A(1)` contient l'entier *n*. L'entier *n* étant fixé en première position, il reste $(n-1)!$ façons de placer les autres pour fabriquer une permutation de $[\![1,n]\!]$ donc il y a $(n-1)!$ permutations dans lesquelles *n* est en première position. Ainsi :

$$\boxed{P(X_n = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}}$$

• L'événement $(X_n = n)$ est réalisé lorsque le vecteur `A` est le vecteur `1:n`, On a donc :

$$\boxed{P(X_n = n) = \frac{1}{n!}}$$

• On sait que $X_2(\Omega) = [\![1,2]\!]$, et avec ce qui précède, on a $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X_2 = 2) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$ donc X_2 suit la loi uniforme sur $[\![1,2]\!]$.

• On sait que $X_3(\Omega) = [\![1,3]\!]$, et avec ce qui précède, on a $P(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$ et $P(X_3 = 3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$. On en déduit $P(X_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

c) Pour tout *n* supérieur ou égal à 2, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $((A_n = n), (A_n < n))$ s'écrit :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ P(X_n = j) = P(A_n = n)P_{(A_n=n)}(X_n = j) + P(A_n < n)P_{(A_n<n)}(X_n = j)$$

• On a $P(A_n = n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, d'où $P(A_n < n) = \frac{n-1}{n}$.

• Ensuite, sachant que $(A_n = n)$ est réalisé, on est certain qu'il y aura un changement de contenu de la variable `c` au dernier tour de la boucle, donc pour réaliser $(X_n = j)$, c'est-à-dire avoir *j* affectations de la variable `c` en tout, il faut et il suffit que l'on ait $j-1$ affectations de `c` avant le dernier tour (ce qui nécessite $j \geq 2$ car il y a toujours l'affectation initiale avant la boucle) : tout se passe alors comme si on travaillait avec un vecteur initial de $n-1$ éléments (tous sauf l'entier *n*), pour lequel le nombre d'affectations de la variable `c` serait une variable aléatoire Y_{n-1}, qui a bien sûr même loi que X_{n-1} et qui doit prendre la valeur $j-1$. On peut conclure :

$$P_{(A_n=n)}(X_n = j) = P(Y_{n-1} = j-1) = P(X_{n-1} = j-1)$$

- Pour finir, sachant que $(A_n < n)$ est réalisé, on est certain qu'il n'y aura pas de changement de contenu de la variable `c` au dernier tour de la boucle, donc pour réaliser $(X_n = j)$, c'est-à-dire avoir j affectations de la variable `c` en tout, il faut et il suffit que l'on ait j affectations de `c` avant le dernier tour : tout se passe alors comme si on travaillait avec un vecteur initial de $n-1$ éléments (tous sauf celui qui est en position n dans le vecteur `A`), pour lequel le nombre d'affectations de la variable c serait une variable aléatoire Z_{n-1}, qui a bien sûr même loi que X_{n-1} et qui doit prendre la valeur j. On peut conclure :

$$P_{(A_n<n)}(X_n = j) = P(Z_{n-1} = j) = P(X_{n-1} = j)$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall j \in [\![2,n]\!],\ P(X_n = j) = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j)}$$

d) On sait que $X_4(\Omega) = [\![1,4]\!]$, et avec la question 9b), on a :

$$P(X_4 = 1) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X_4 = 4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Avec la question 9c), en faisant $n = 4$, on obtient :

$$P(X_4 = 2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{11}{24}$$

On trouve enfin :

$$P(X_4 = 3) = \frac{1}{4}$$

10) a) Pour $j = 1$ l'égalité obtenue à la question 8c) s'écrit :

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = 0) + \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = 1)$$

D'après la question 8b), ceci donne : $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = 0) + \frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}$.

Comme $P(X_{n-1} = 0) = 0$ car il y a au moins la 1$^{\text{re}}$ affectation, on obtient $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$, ce qui est correct, et l'égalité de la question 9c) est valable pour tout j de $[\![1,n]\!]$.

b) On multiplie les deux membres de l'égalité obtenue à la question 9c) par t^j :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ P(X_n = j)t^j = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1)t^j + \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j)t^j$$

On somme pour j allant de 1 à n :

$$\sum_{j=1}^{n} P(X_n = j)t^j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(X_{n-1} = j-1)t^j + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(X_{n-1} = j)t^j$$

En simplifiant ce qui l'est :

$$\sum_{j=1}^{n} P(X_n = j)t^j = \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} P(X_{n-1} = j-1)t^j + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1} = j)t^j$$

Après changement d'indice et mise en facteur de t dans la 1re somme de droite, on trouve :

$$\sum_{j=1}^{n} P(X_n = j)t^j = \frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n-1} P(X_{n-1} = i)t^i + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1} = j)t^j$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t)}$$

c) Par récurrence immédiate, on trouve facilement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_n(t) = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(t+j)}$$

11) En dérivant la relation ($*$) puis en évaluant en 1, on trouve, d'après les questions 1) et 2) :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ E_n = E_{n-1} + \frac{1}{n}}$$

En écrivant $E_k - E_{k-1} = \dfrac{1}{k}$ et en sommant pour k allant de 2 à n (avec $n \geq 2$) on trouve : $E_n - E_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.

Comme $E_1 = E(X_1) = 1$, on obtient : $E_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ceci restant valable pour $n = 1$ (ça donne $1 = 1$), on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n}$$

12) a) En dérivant une deuxième fois la relation ($*$) et en évaluant en 1, on obtient cette fois (pour $n \geq 2$) :

$$G_n''(1) = V_n - u_n + u_n^2$$

On trouve de même $G_{n-1}''(1) = V_{n-1} - u_{n-1} + u_{n-1}^2$, et en remplaçant dans l'égalité $G_n''(1) = \dfrac{2}{n}u_{n-1} + G_{n-1}''(1)$, on obtient après calculs et simplifications :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

b) En écrivant $V_k - V_{k-1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$ et en sommant encore une fois pour k allant de 2 à n (avec $n \geq 2$), on obtient : $\forall n \geq 2$, $V_n - V_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Comme on a $V_1 = 0$, il vient :

$$\forall n \geq 2,\ V_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Finalement, on trouve :

$$\forall n \geq 2,\ V_n = u_n - h_n$$

Pour $n = 1$, ceci donne $V_1 = u_1 - h_1 = 1 - 1 = 0$, ce qui est correct, et ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = u_n - h_n}$$

c) Pour tout $n \geq 2$, on a $\ln n > 0$ donc : $\frac{V_n}{\ln n} = \frac{u_n}{\ln n} - \frac{h_n}{\ln n}$.

Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$, et comme (h_n) est convergente, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln n} = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V_n}{\ln n} = 1$

Conclusion :

$$\boxed{V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n}$$